FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

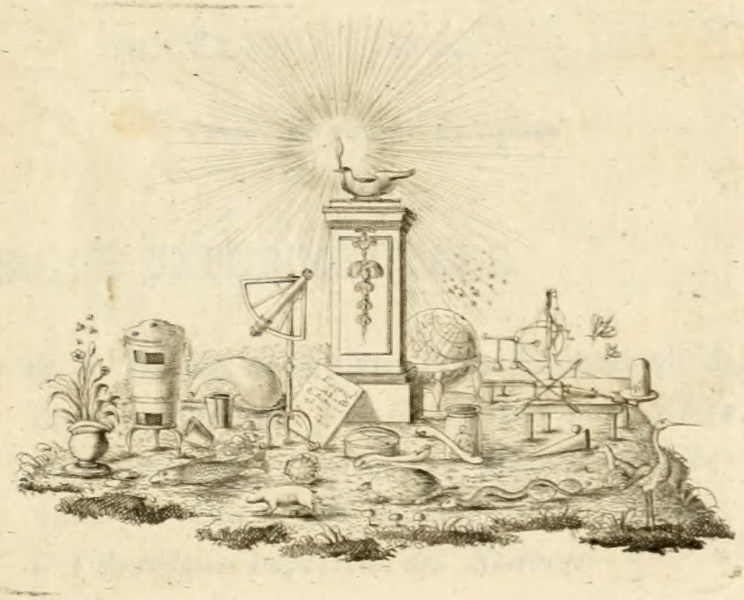
Bound at

ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

5.06 (47.4

pro Anno MDCCLXXIX.

PARS PRIOR.



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCLXXXII.

4/22/1916

r16.70292 April 28

TABLE.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

MDCCLXXIX. Janvier —— Juin.

avec une planche de figures.

PHYSIQUE EXPERIMENTALE.

Page

Lettre de S. E. Mr. le Comte Ivan Grégorievitſch de Czerniſchef, *Vice-Préſident du Colege de l'Amirauté, Chambellan actuel, & Chevalier de Ordres de Ruſſie & de Pologne, à l'Académie Impériale des Sciences* - - 3.

Expé-

Pag.

Expériences ſur l'inflammation ſpontanée de la ſuie mêlée avec différentes huiles, par Mr. J. G. Géorgi - - - - - - - 19.

Expériences rélatives à l'inflammabilité ſpontanée du chanvre & du lin, par le même - 54.

HISTOIRE NATURELLE.

Deſcription de l'organe de génération du Rhinoceros à deux cornes - - - - 64.

Extraits de Rapports envoyés à l'Académie par Mr. le Translateur Jährig - - - - 65.

Analyſe chymique d'une eſpèce de Gomme réſine qui ſe produit autour de la racine du Prenanthes chondrilloïdes: par Mr. J. G. Géorgi: *traduite de l'Allemand* - - - - - 68.

MÉTÉOROLOGIE

Hyver de 1778 *à* 1779 - - - 72.

PROMO-

Pag.
PROMOTION. . . . . 77.
MORTS - - - - - - - ibidem.
OUVRAGES, *machines & inventions préſentées ou communiquées à l'Académie pendant le cours du premier ſemeſtre de l'année 1779* - - 80.

ACTA ACADEMIAE SCIENTIARUM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

pro Anno MDCCLXXIX. Pars prior

cum tabulis XI aeri inciſis.

MATHEMATICA Pag.
LEONH. EVLER. *De formatione fractionum continuarum* - - - - - - - - - - 3.
—— —— *De tribus numeris quadratis, quorum tam ſumma, quam ſumma productorum ex binis ſit quadratum* - - - - - - 30.

Pag.

I. A. EVLER. *Ad Diſſertationem Patris praecedentem commentatio* - - - - 40.

A. I. LEXELL. *De Epicycloidibus in ſuperficie ſphaerica deſcriptis* - - - - - 49

LEONH. EVLER. *Trigonometria ſphaerica univerſa, ex primis principiis breviter & dilucide derivata* - - - - - - 72

PHYSICO-MATHEMATICA.

LEONH. EVLER. *De motu oſcillatorio mixto plurium pendulorum ex eodem corpore mobili ſuſpenſorum* - - - - - - - 89.

—— —— *Inveſtigatio motuum quibus laminae & virgae elaſticae contremiſcunt* - - - 103.

—— —— *Coniectura circa naturam aëris, pro explicandis phaenomenis in atmoſphaera obſervatis* - - - - - - - - 162.

PETR. INOCHODSOF. *Deſcriptio inſtrumenti ad declivitatem locorum menſurandam apti* - 188.

C. G.

Pag.

C. G. KRATZENSTEIN. *Tubi iconantidiptici ſive duplicantis emendatio* - - - - - 192.

LEONH. EVLER. *Annotatio in praecedentem diſſertationem* - - - - - - - 201.

PHYSICA.

C. F. WOLFF. *De veſiculae felleae humanae ductusque humani cyſtici & choleaochi ſuperficiebus internis* - - - - - - - 205.

BASIL. ZOUIEW. *Anatome muſculi ſubcutanei in Erinaceo Europaeo Linn.* - - - - 225.

—— —— *Deſcriptio Piſcis non deſcripti, qui pertinet ad genus ſcarorum* Forskalii - - 229.

N. OSERETSKOVSKY. *Exemplum Electricitatis praeternaturalis* - - - - - 233.

ASTRONOMICA.

LEONH. EVLER. *Theoria parallaxeos ad figuram terrae ſphaeroidicam accomodata* - - 241.

A. I. LEXELL. *De aeſtimando tempore, quo diameter ſolis per circulum quendam ſive verticalem,*

Pag.

calem, ſive horizonti parallelum tranſire videtur - - - - - 279.

A. I. LEXELL. *Obſervationes de problemate, quo quaeritur elevatio poli ex obſervata altitudine ſolis, ex obſervato quoque tempore, quo diameter Solis filum aliquod, ſive verticaliter, ſive horizontaliter diſpoſitum, pertranſit* - - 300.

NICOLAS FUSS. *Réflexions ſur les principales methodes de corriger les diſtances apparentes de la Lune à une Etoile, rélativement aux effets de la Refraction & de la Parallaxe* - 310.

STEPH. RUMOVSKI. *Obſervationes aſtronomicae Petropoli habitae.* - - - - - 340.

HISTOIRE.

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES
SCIENCES.

HISTOIRE

DE L'ACADÉMIE.

MDCCLXXIX.
Janvier —— Juin.

PHYSIQUE EXPÉRIMENTALE.

Lettre de S. E. Mr. le Comte *Jvan Grégorevitſch de Czerniſchew,* Vice-Préſident du College de l'Amirauté, Chambellan actuel, & Chevalier des Ordres de Ruſſie & de Pologne,

A l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg (*).

Traduite du Ruſſe.

Le 20 Avril à 11 heures du ſoir, on apperçut dans le Port de Cronſtadt une fumée épaiſſe, qui

a 2 s'éle-

(*) Quoique cette lettre & les expériences ſuivantes qu'elle a occaſionnées ſoient de plus fraiche date que ne le ſont les autres écrits conte-

s'élevoit d'une frégatte de l'eſcadre qui ſe préparoit à mettre à la voile, quoique depuis 5 jours il n'y eût abſolument point eu de feu Cette fumée parut ſortir de la chambre du Maître d'équipage fermée & cachetée depuis quatre heures: on y avoit porté & dépoſé pluſieurs choſes néceſſaires à l'entier équipement de la frégatte. On força la porte de la chambre & l'on y vit des toiles à voile rouges de feu & étincelantes.

Toutes les recherches qu'on put faire pour découvrir la cauſe de cet accident furent infructueuſes, & à la fin on auroit été obligé de laiſſer la choſe dans l'obſcurité qui l'enveloppoit en ſoupçonnant peut-être des perſonnes innocentes, ainſi que l'année derniere à l'occaſion d'un ſemblable accident, ſi *Sa Majeſté Impériale* n'avoit pas daigné Elle-même mettre ſur la voye les perſonnes chargées de cet examen, en me donnant l'ordre ſuivant:

“ Comme Nous avons vu par le Journal que vous „ Nous avez préſenté touchant l'accident arrivé à la frégatte Marie, qu'il y avoit eu dans la chambre où le „ feu s'eſt manifeſté, quelques rouleaux de cordages, & „ au milieu d'un hamac, un mélange de ſuie & d'huile „ enveloppé, & deſtiné à la peinture du vaiſſeau, Nous „ Nous ſouvenons qu'entre autres cauſes du feu qui prit „ l'année derniere aux magazins de chanvre, on avoit „ allégué que cet incendie pouvoit avoir eu lieu, parceque „ le

contenus dans ce volume, ayant été lues en Août 1781; l'importance de la découverte dont il s'agit ici, a déterminé l'Académie à anticiper le temps de ſa publication & à l'inſérer ſans retard dans le volume des ſes Actes qui ſe trouvoit ſous preſſe.

„ le chanvre avoit été peut-être enveloppé de nattes enduites d'huile, ou bien amoncelé avec ces mêmes nattes: „ c'eſt pourquoi vous aurez ſoin d'examiner ſcrupuleuſement cette obſervation dans le cas préſent."

J'ai d'abord communiqué cet ordre au Comité nommé par le Collège de l'Amirauté à cet examen, & qui étoit composé d'un membre du dit Collège, du Commandant en chef du Port, & de quelques autres Officiers de Pavillon. Ce Comité réſolut en conformité de l'ordre Impérial qu'il avoit pour guide, d'examiner attentivement, ſi l'incendie en queſtion n'auroit pas pu être l'effet phyſique d'une cauſe qui eût pu le produire d'elle-même. Et comme on a vu effectivement par le procès verbal dreſſé à cet effet, qu'il s'étoit trouvé dans la chambre du Maître d'equipage, où la fumée s'étoit manifeſtée, un mélange de ſuie & d'huile, & qu'en l'éteignant on le vit jetter des etincelles; on réſolut de faire des expériences là deſſus. Pour cet effet on fit le même mélange de ſuie & d'huile que celui de la frégatte: on mit dans un ſeau 40 livres de ſuie, on y verſa 35 livres d'huile de chenevis cuite, que l'on répandit après l'y avoir laiſſée durant une heure: On laiſſa la ſuie imbibée d'huile dans le ſeau autant de temps qu'un pareil mêlange auſſi dans un ſeau étoit reſté dans la frégatte, c'eſt à dire quatre heures. Enſuite on enveloppa cette maſſe de ſuie & on la mit dans un hamac, placé à coté de la chambre du Conſeil: & pour éviter tout ſoupçon, deux membres du Comité mirent leur cachet ſur le hamac & ſur la porte que l'on fit garder par une ſentinelle. Pour plus de ſûreté quatre Officiers de Marine

eurent ordre d'y avoir l'oeil pendant la nuit, & d'avertir le Commandant en chef, au moindre ſigne de fumée.

Cette expérience ſe fit le 26 Avril à 11 heures avant midi, en préſence de tous les Officiers, qui avoient été nommés pour y aſſiſter. Le lendemain à 6 heures, après un intervalle de 13 heures depuis l'appoſition du ſcellé la fumée ſe manifeſta. Le Commandant en fut averti ſur le champ par le plus ancien Officier de Garde. Il y accourut promptement, vit par un trou de la porte ſortir de la fumée du hamac, & avant que de deſceller la porte, il envoya chercher les autres membres du Comité; mais comme la fumée devenoit trop épaiſſe & que le feu commençoit à éclater, il ſe vit obligé d'ouvrir la porte ſans les attendre. Dès que l'air libre eût pénétré jusqu'au hamac, il commença à s'enflammer & brula.

Le Collège de l'Amirauté réſolut de réïterer ces expériences en pluſieurs endroits & de différentes façons, pour être en état de mieux approfondir les effets & les ſuites de ce mélange de ſuie & d'huile enveloppé de toile: elles ont réuſſi pour la plus-part.

Je ſuis perſuadé que l'Académie Impériale des Sciences prendra cet objet en conſidération, & qu'elle ſera des expériences rélatives, qui conduiront à de nouvelles découvertes.

J'ai l'honneur de joindre ici une notice de la quantité de ſuie & d'huile qu'on a employée, auſſi bien que du temps que le mêlange a mis à s'enflammer. J'ai jugé

jugé à propos d'y ajouter la remarque, que les mêlanges de 3 livres de ſuie & d'$1\frac{1}{2}$ livre d'huile de chénevis cuite, faits dans ma maiſon ſe ſont toujours enflammés.

Iwan Comte Czerniſchew.

I. Expériences faites au Port des Galères.

1. Le 28 Avril à 3 heures après midi, on verſa ſur 20 ℔ de ſuie ordinaire 20 ℔ d'huile de chénevis cuite, dont on répandit enſuite un gobelet.

2. A 4 heures du même après-midi, on verſa ce gobelet d'huile de chénevis cuite ſur 2 ℔ de ſuie ordinaire.

   Ces deux maſſes furent ſcellées & enfermées dans la chambre attenante au Corps de Garde.

   Effet. Le lendemain 29 le matin à 10 heures, la premiere maſſe enveloppée dans un hamac n'avoit acquis aucune chaleur. La ſeconde qui étoit reſtée dans une cuve fut trouvée chaude: on l'enveloppa dans de la toile & on en vit ſortir de la fumée vers le ſoir.

3. Le 29 Avril vers les 5 heures du ſoir, on verſa 4 ℔ d'huile de chénevis cuite ſur 8 ℔ de ſuie ordinaire, & on enferma la maſſe dans la chambre du bain.

   Effet. La chaleur ſe manifeſta à 8 heures du ſoir, mais elle ne fut ſuivie d'aucun embraſement.

4. Le même ſoir à 9 heures on verſa ſur 20 ℔ de ſuie

ſuie ordinaire, 17½ ℔ d'huile commune, dont on répandit 7 ℔ au bout d'une heure. La maſſe repoſa pendant 5 heures: le lendemain 30, le matin à 3 heures on l'enveloppa dans un hamac & on l'enferma dans la chambre de Corps de Garde.

Effet. La maſſe devint chaude au bout de 3 heures; & elle s'embraſa à 12 heures & demie. Le feu qui ſortit du milieu fut violent.

5. Le 29 Avril à 10 heures du ſoir, on verſa ſur 20 ℔ de minium 10 ℔ d'huile de chénevis cuite, dont on répandit enſuite 7½ ℔: on plaça cette maſſe dans le comptoir.

6. Le même ſoir à 11 heures, on verſa ſur 3 ℔ de ſuie d'Hollande ¾ ℔ d'huile de chénevis cuite: cette maſſe fut dépoſée dans la chambre de l'Officier auprès des magaſins.

7. En même temps on verſa auſſi ¾ ℔ d'huile de chénevis cuite ſur 10 ℔ de ſuie commune, & on enferma cette mixtion dans la chambre de la Garde à coté du comptoir.

8. Le 1er Mai à 1 heure après midi, on verſa ſur 18 ℔ de ſuie commune 13 ℔ d'huile ordinaire, dont on répandit après quelques momens 5 ℔; & la maſſe fut miſe dans la chambre du Corps de Garde.

Effet. Toutes ces maſſes acquirent quelque degré de chaleur ſans s'embraſer: & au bout de quelques heures elles ſe refroidirent.

9. Le 1er Mai à 2 heures après midi, on prit 10 ℔ de

de ſuie ordinaire & 5 ℔ d'huile de chénevis commune ou crue, dont on répandit enſuite 1 ℔. à 7 heures du ſoir: la maſſe fut enveloppée dans un hamac, & enfermée dans la chambre du bain.

Effet. Le lendemain 2, à 9 heures du matin, la maſſe commença à donner des indices de chaleur, & à 6 heures du ſoir, elle s'embraſa avec violence.

II. Expériences faites dans l'hôtel de S. E. Mr. le Comte de Czerniſchef.

1 & 2. Le 30 Avril à midi on prépara les deux mêlanges ſuivans:

3 ℔ de ſuie d'Hollande avec $\frac{3}{4}$ ℔ d'huile de chénevis cuite.

3 ℔ de ſuie d'Hollande avec 3 ℔ d'huile de chénevis cuite.

On enveloppa ces deux maſſes d'abord après leur mixtion dans des toiles: on poſa la premiere dans le veſtibule du bain & l'autre dans un corridor ayant deux fenêtres expoſées au Sud.

Effet. A 6 heures du ſoir l'une & l'autre maſſe acquirent de la chaleur: mais il ne s'en ſuivit aucun embraſement.

3. Le 1er Mai à midi on verſa 10 ℔ d'huile de chénevis cuite ſur 10 ℔ de ſuie d'Hollande; on laiſſa repoſer la maſſe pendant 5 heures ſans la mêler: on l'enveloppa enfin dans un hamac & on l'enferma dans le veſtibule du bain.

 Il n'en

Il n'en réſulta aucune chaleur.

4. Le 3 Mai à 11 heures avant midi, on mêla enſemble 3 ℔ de ſuie ordinaire avec 1½ ℔ d'huile de chénevis cuite: cette maſſe repoſa durant une heure & fut enſuite enveloppée dans un hamac & tranſportée dans le veſtibule ſus-mentionné.

Effet. Elle s'embraſa à 4 heures & demie après midi; on la porta à l'air libre, & elle brula au delà de 3 heures.

5. Le 4 Mai à 10 heures avant midi, on répéta l'expérience précédente, & on enveloppa la maſſe une heure après la mixtion dans de la toile.

Effet. A 2 heures & demie après midi, on en vit ſortir de la fumée, à 3 heures il en ſortit des étincelles, & après que la maſſe fut expoſée à l'air libre, elle s'enflamma & ſe conſuma.

6. Le même jour à douze heures & demie on fit une ſeconde répétition de la 4eme expérience en enveloppant la maſſe dans un hamac, toujours 1 heure après la mixtion.

Effet. Les mêmes phénomènes eurent lieu à 5 heures du ſoir.

7 & 8. Le 5 Mai à 4 heures du matin, on prépara deux maſſes pareilles à celle de la 4e expérience & des ſuivantes; on enveloppa l'une & l'autre dans des toiles, & on les enferma dans le veſtibule du bain.

Effet. A 8 heures du matin l'une & l'autre maſſe s'embraſerent.

III. Ex-

III. Expériences faites à Cronſtadt le 28 Avril à 5 heures du ſoir.

Avertiſſement. Dans les ſix premieres de ces expériences, on verſa ſimplement l'huile ſur la ſuie, & on laiſſa repoſer les maſſes pendant 4 heures, c'eſt à dire jusqu'à 9 heures du ſoir. On répandit enſuite l'huile ſuperflue, dont le poids eſt marqué à chaque expérience. Enfin on enveloppa les portions de ſuie ainſi imbibees dans de vieux hamacs & on les poſa dans une chambre à une diſtance ſuffiſante l'une de l'autre. Dans les deux dernières expériences, les maſſes furent d'abord après leur mixtion enveloppées dans des hamacs.

1. 40 ℔ de ſuie commune.
   35 ℔ d'huile de chenevis crue dont on répandit au bout de 4 heures 24 ℔.

   Effet. La maſſe s'embraſa le lendemain matin à 5 heures $\frac{3}{4}$.

2. 20 ℔ de ſuie commune.
   $17\frac{1}{2}$ ℔ d'huile de chénevis crue dont on répandit 7 ℔.

   Effet. L'embraſement eût lieu à la même heure.

3. 10 ℔ de ſuie commune.
   5 ℔ d'huile de chénevis crue dont on répandit $3\frac{1}{2}$ ℔.

   Effet. La chaleur de la maſſe augmenta jusqu'à 5 heures $\frac{3}{4}$ du lendemain matin: mais il n'y eût point d'embraſement.

4. 4 ℔ de ſuie d'Hollande.
4 ℔ d'huile de chénevis crue: on n'en répandit rien.

Effet. La maſſe s'embraſa à douze heures & demie de la nuit.

5. 8 ℔ de ſuie commune.
4 ℔ d'huile de chénevis cuite, dont on répandit $\frac{1}{2}$ ℔.

Effet. La maſſe s'échauffa & ſe refroidit alternativement ſans s'enflammer.

6. 32 ℔ de minium.
10 ℔ d'huile de chénevis cuite dont on répandit 7 $\frac{1}{2}$ ℔.

Effet. Il ne ſe manifeſta aucune chaleur.

7. 3 ℔ de ſuie d'Hollande.
$\frac{3}{4}$ ℔ d'huile de chénevis cuite.

Effet. La maſſe s'embraſa à 9 heures du ſoir, c'eſt à dire au bout de 4 heures. On ne l'éteignit qu'avec peine: même après l'avoir jettée dans une cuve remplie d'eau, elle remonta & brula encore pendant quelque temps.

8. 10 ℔ de ſuie commune.
$\frac{3}{4}$ ℔ d'huile de chénevis cuite.

Effet. La maſſe s'échauffa, & la chaleur augmenta jusqu'à minuit: elle diminua enſuite, & la maſſe redevint froide.

IV. Ex-

IV. Expériences faites à l'Amirauté.

1. Le 28 Avril à 6 heures 20′ du ſoir on verſa ſur 45 ℔ de ſuie commune, 25 ℔ d'huile de chénevis crue: 1 heure après, on en répandit 14 ℔, & au bout de 4 heures on enveloppa la maſſe dans de la toile & on la mit dans une chambre voutée ſans fenêtres.

Effet. La maſſe s'embraſa le 30 à 3 heures 55′ du matin; par conſéquent 27 heures 35′ après l'avoir enveloppée.

2. Le 29 Avril à 3 heures après midi, on verſa ſur 40 ℔ de ſuie commune, 35 ℔ d'huile crue: on procéda comme dans l'expérience précédente, en répandant 27½ ℔ d'huile. La maſſe fut miſe dans une chambre à deux grandes croiſées.

Effet. L'Embraſement eût lieu le lendemain après midi à 2 heures 15′, ou 23 heures 45′ après qu'on eût enveloppé la maſſe.

3. A 4 heures du même jour, 29 Avril après midi on réïtera la même procedure avec 32 ℔ de ſuie commune & 16 ℔ d'huile de chénevis cuite, dont on répandit 13 ℔. La maſſe fut poſée dans une chambre à une ſeule croiſée.

Effet. Le feu y prit le lendemain à 9 heures 45′ du ſoir, 12 heures 45′ après que la maſſe eût été enveloppée.

4. A 5 heures du même après-midi, on verſa ſur 6 ℔ de ſuie d'Hollande, un poids égal d'huile de ché-

chénevis crue, & on n'en répandit rien. La maſſe fut dépoſée dans la chambre à une croiſée.

Effet. On obſerva de la chaleur, mais elle ne fut point ſuivie d'embraſement. Au bout de 18 heures la maſſe fut refroidie.

5. A 6 heures du même ſoir, on fit un eſſai avec 32 ℔ de minium, ſur lequel on verſa 10 ℔ d'huile de chénevis cuite, dont on répandit au bout d'une heure 7 ℔. On mit la maſſe dans la chambre à deux croiſées.

Effet. Il ne ſe manifeſta aucune chaleur.

6. Le lendemain 30 Avril à 8 heures du matin, l'expérience fut faite avec 10 ℔ de ſuie commune & 4 ℔ d'huile de chénevis cuite ſans en répandre. La maſſe fut encore enfermée dans la chambre à deux croiſées.

Effet. La chaleur ſe manifeſta au bout de 58 heures, mais il n'y eut point d'embraſement.

7. Le 1er Mai à 12 heures & demie, on mêla enſemble 20 ℔ de ſuie commune & 17 ℔ d'huile de chénevis crue; on enveloppa enſuite cette maſſe dans de la toile & on la tranſporta dans une chambre, dont les deux fenêtres regardent le Sud.

Effet. La maſſe s'échauffa au commencement, mais elle ne s'embraſa pas & ſe refroidit au bout de 48 heures.

8. 9. A la même heure on fit encore deux mixtions pareil-

pareilles à celle de l'expérience précedente: en employant pour la 1ere.

10 ℔ de ſuie commune & 5 ℔ d'huile de chénevis cuite; & pour la 2de,

3½ ℔ de ſuie d'Hollande & 3 ℔ d'huile de chénevis cuite

On tranſporta ces deux maſſes, enveloppées dans de la toile, dans la même chambre à deux croiſées vers le Sud.

Effet. Les phénomènes furent les mêmes que dans l'expérience précédente, à l'exception, que les maſſes ſe trouverent déja refroidies au bout de 18 heures.

10. 11. Le 4 Mai à 11 heures avant midi, on fit deux eſſais; dans le premier on mêla enſemble 10 ℔ de ſuie commune & 8 ℔ d'huile de chénevis crue, dont on répandit à midi le ſuperflu peſant 1 ℔. Dans le ſecond eſſai on employa pour la même quantité de ſuie 8 ℔ d'huile de chénevis cuite, dont on répandit au bout d'une heure 1½ ℔. A 4 heures après midi on enveloppa l'une & l'autre maſſe dans de la toile & on les mit dans la chambre à deux croiſées vers le Sud.

Effet. Ces deux maſſes donnèrent les mêmes phénomènes: elles manifeſtèrent d'abord de la chaleur, mais elles ne s'embraſèrent pas, & au bout de 32 heures, l'une & l'autre avoient perdu toute chaleur.

12. 13. A la même heure on fit encore deux mixtions, en employant pour la 1ere 2 ℔ de ſuie d'Hollande & $\frac{1}{2}$ ℔ d'huile de chénevis cuite; & pour la 2de 1 ℔ de ſuie d'Hollande & $\frac{1}{2}$ ℔ d'huile de chénevis cuite: on mit l'un & l'aute pacquet dans la chambre à deux croiſées.

Effet. Aucun indice de caléfaction pendant 32 heures.

14. 15. Toujours au même avant-midi & dans la même chambre, on mit les deux mixtions ſuivantes, enveloppées dans des toiles:

La 1ere de $2\frac{1}{2}$ ℔ de ſuie commune & $\frac{1}{4}$ ℔ d'huile de chénevis cuite.

La 2de de $2\frac{1}{2}$ ℔ de ſuie d'Hollande & $\frac{1}{4}$ ℔ d'huile de chénevis cuite.

Effet. Ces deux maſſes s'échaufferent au commencement, & ſe refroidirent au bout de quelques heures.

16. Le 5 Mai à 8 heures du matin, on mêla enſemble 3 ℔ de ſuie commune avec $1\frac{1}{2}$ ℔ d'huile de chénevis cuite: on enveloppa la maſſe comme dans les expériences précedentes & on la dépoſa dans une chambre à deux croiſées expoſées vers le nord.

Effet. A 1 heure 45' après midi, ou bien au bout de $5\frac{3}{4}$ heures, la maſſe s'enflamma & le feu fut très vif.

V. Ex-

V. Expériences faites à l'Amirauté le 2 Mai avec du chanvre, de l'huile de chénevis & de la ſuie.

A douze heures & demie on entortilla dans des toiles les huit mêlanges ſuivans, & on les mit dans la chambre à deux croiſées expoſées vers le Nord:

1. Du chanvre poiſſé & de l'huile de chénevis crue.
2. Du chanvre poiſſé & de l'huile de chénevis cuite.
3. Du chanvre ſérancé & de l'huile de chénevis crue.
4. Du chanvre ſérancé & de l'huile de chénevis cuite.
5. Du chanvre poiſſé, de l'huile de chénevis crue & de la ſuie.
6. Du chanvre poiſſé, de l'huile de chénevis cuite & de la ſuie.
7. Du chanvre ſérancé, de l'huile de chénevis crue & de la ſuie.
8. Du chanvre ſérancé, de l'huile de chénevis cuite, & de la ſuie.

Le dernier pacquet, où le chanvre n'avoit point été humecté conſidérablement fut le ſeul, qui s'echauffa & s'embraſa: cela arriva à 4 heures & demie après midi c'eſt à dire au bout de 4 heures. Les ſept autres pacquets, où une plus grande portion d'huile avoit été employée, ne donnerent aucun indice de caléfaction, quoiqu'on ait attendu au delà de 28 heures.

VI. Expériences faites à l'Amirauté le 4 Mai à 11 heures avant midi, dans la chambre à deux croiſées expoſées au Sud.

1. Une livre de chanvre poiſſé humecté d' $\frac{1}{4}$ ℔ d'huile de chénevis crue, commença d'abord à s'échauffer, mais il ne s'enſuivit point d'embraſement, & au bout de 31 heures, la chaleur avoit entierement diſparu.

2. Les trois maſſes ſuivantes n'ont donné aucun indice de caléfaction, quoiqu'on les ait obſervées pendant 31 heures.

1.) 1 ℔ de chanvre poiſſé & $\frac{1}{4}$ ℔ d'huile de chénevis cuite.

2.) 1 ℔ de chanvre ſérancé & $\frac{1}{4}$ ℔ d'huile de chénevis crue.

3.) 1 ℔ de chanvre ſérancé & $\frac{1}{4}$ ℔ d'huile de chénevis cuite.

EXPE-

EXPÉRIENCES

ſur l'inflammation ſpontanée de la ſuie mêlée avec différentes huiles,

par

Mr. J. G. Géorgi.

Traduites de l'Allemand.

Peu après que le bruit ſe fut répandu que la frégatte impériale Marie avoit pris feu dans le port de Cronſtadt, ce qui arriva le 20 d'Avril 1781, on commença à parler auſſi d'un mélange de ſuie & d'huile, dont l'inflammation ſpontanée devoit avoir cauſé cet incendie. En ſuppoſant le fait avéré, il paroiſſoit bien paradoxe qu'on n'eût encore jamais obſervé la réalité ni même la poſſibilité d'un pareil phénomene; vu que ſans contredit le mélange en queſtion s'eſt fait, non une fois mais des millions de fois, dans toutes les contrées de l'Europe, & qu'il s'eſt trouvé, ſoit par accident, ſoit à deſſein, tantôt couvert, tantôt à découvert, tantôt dans un lieu, tantôt dans un autre, & cela pendant des intervalles de tems plus ou moins longs. Mais lorsque notre auguſte Souveraine

 eut

eut fait faire des perquiſitions ſur les lieux mêmes, la choſe ſe trouva certaine, & pluſieurs expériences réïtérées la confirmerent. Comme il ne s'agiſſoit donc plus d'un ſoupçon ou d'une ſimple probabilité, je me mis auſſitôt de mon propre chef à faire des expériences là deſſus; & peu après je me fis un devoir de les continuer par ordre de Son Excellence Monſieur le Chambellan *de Domaſchneſ*, Directeur de l'Académie impériale des ſciences.

Les expériences de l'Amirauté ont été faites avant les miennes; & ſi elles euſſent pu m'être communiquées, j'aurois omis quelques unes des miennes, ou du moins je les aurois faites d'une autre maniere: j'aurois tâché, en partant du point auquel l'Amirauté s'étoit arrêtée, de pouſſer mes recherches auſſi loin que poſſible. Mais ne pouvant les obtenir, je fus réduit à conſidérer la choſe comme un problème à réſoudre, dont cependant la poſſibilité étoit démontrée. Les indices que je reçus par la complaiſance de Mr. *Jean Alb. Euler*, touchant l'une de ces expériences qui devoit rarement manquer, & qui étoit indiquée dans un rapport du Comité établi à Cronſtadt pour cet objet, m'épargnerent beaucoup de peines inutiles; quoique cette expérience même ne m'ait jamais réuſſi, quand j'ai voulu la répéter. Lorſque, le 13 du mois d'Août, S. E. Mr. le Comte *Jean Czerniſchef*, Vice-Préſident de l'Amirauté communiqua à l'Académie les expériences faites par l'Amirauté, je trouvai que les miennes pouvoient ſervir en partie à les conſtater, en partie à leur donner plus d'étendue, & en général à répandre du jour ſur toute cette matière. C'eſt pourquoi je vais tranſcrire ici mes obſervations, telles que je les ai préſentées à l'Aca-

cadémie le 5 de Juillet 1781, en y ajoutant celles que j'ai faites du depuis.

Pour éviter les répétitions qui pourroient ſe gliſſer dans mon récit, je me crois obligé de faire préallablement les remarques ſuivantes.

La ſuie ou le noir de fumée d'Allemagne, eſt ce que les Allemands appellent ſuie de peintre (*Mahler-Ruſs*) & qu'on nomme auſſi du noir à noircir: on le vend ici en boëtes plus ou moins grandes qui ont la forme de petits tonneaux, ſous le nom de ſuie d'Hollande (*Ghollandskaya Saja*): je me ſervirai indifféremment de ces divers noms. C'eſt une matière très fine, très légere & très noire dans ſon genre. *La ſuie ou le noir de fumée de Ruſſie*, eſt une ſubſtance plus groſſiere, plus peſante au triple ou au quadruple de l'autre, & plus graſſe en apparence. On la tire des réſidus de la poix, auſſi bien que de bois de ſapin réſineux. On s'en ſert communément pour peinturer le boiſage, à cauſe du bon-marché. C'eſt de cette derniere eſpece qu'étoit le noir que le Barbouilleur à Cronſtadt avoit malheureuſement mêlé avec de l'huile, & conſervé pour ſon uſage. (*Voyez la lettre du Comte de Czerniſchef.*)

L'huile de chénevis cuite, c'eſt cette huile réduite par la cuiſſon en vernis après avoir été mêlée d'un peu de minium par un procédé aſſés connu. Nos Barbouilleurs prennent pour leur vernis qu'il appellent *olive* de l'huile de chénevis (*kanapli masla*) parce que cette huile eſt moins chere que celle de lin, & qu'elle

ne dépoſe par tant de ſédiment ſalin. En place de litarge d'argent, on prend ici ſur une livre d'huile environ une demi-once de minium. C'eſt avec de pareils matériaux que l'Amirauté a auſſi fait ſes expériences.

Pour ſerrer ou envelopper les maſſes, j'ai toujours pris de la toile groſſiere & non-blanchie, qui reſſemble beaucoup à celle dont on fait les eſtrapontins à coucher & les voiles des vaiſſeaux, hormis qu'elle eſt moins forte.

Les mêlanges ont été faits dans une jatte, ou un aſſés grand baſſin de bois, où les maſſes ſont toujours demeurées à découvert jusqu'au moment que je les ai enveloppées de toile.

La chambre de l'Académie qui ſert de laboratoire chymique a deux fenêtres qui donnent à peu près à l'eſt, & une troiſieme presque au ſud: elle a deux portes. Pour arrêter autant que poſſible tout mouvement & toute affluence de l'air extérieur, ſans être empêché néanmoins dans l'obſervation des phénomenes, je me ſuis ſervi d'une caiſſe de bois de cinq piés de long, deux de large & presque autant de haut, qui étoit munie d'un bon couvercle. Je fis faire des échancrures aux deux extrémités de la caiſſe, & les fis fermer par des vitres. Chaquefois qu'il ſe manifeſta quelque réaction intérieure dans les maſſes, on ſentit une odeur plus déſagréable que n'eſt celle de l'huile bouillante, & on vit s'élever des vapeurs dont les vitres furent humectées.

Pre-

Premiere expérience.

Le 1. de Mai. Je mêlai dans un vaſe de verre une livre de noir de fumée de Ruſſie avec une pareille quantité d'huile de lin crue ou non-cuite, & je plaçai le vaſe ouvert dans une cheminée. Cette maſſe visqueuſe ne ſubit pas le moindre changement ſenſible, ni ce jour là, ni les jours ſuivants.

Seconde expérience.

Un autre mélange d'une livre de noir de fumée de Ruſſie avec autant d'huile de chénevis crue, reſta également inactif.

Troiſieme expérience.

Une livre de noir de fumée de Ruſſie, ayant été mêlée avec une livre d'huile d'olive crue, le tout demeura froid.

Quatrieme expérience.

Le 4. de Mai. Je fis une maſſe ſemblable d'une livre de ſuie d'Hollande ou d'Allemagne, avec de l'huile de lin, prenant 3 livres de cette huile: je plaçai cette mixtion à découvert dans la cheminée; mais elle demeura ſans action.

Cinquieme expérience.

Une autre mixtion d'une livre de ſuie d'Hollande avec 3 livres d'huile de chénevis crue, qui fut placée à côté de la précédente, demeura tout auſſi inactive.

Sixie-

Sixieme expérience.

Le 5 de Mai. Une mixtion d'une livre de ſuie d'Hollande avec 3 livres d'huile d'olive commune, laiſſée à découvert, me fruſtra encore de l'eſperance du ſuccès.

Septieme expérience.

Le 10. de Mai. On mit dans le baſſin de bois 3 livres de noir de fumée de Ruſſie, on répandit deſſus $1\frac{1}{2}$ livre d'huile de chénevis cuite, & on fit une pâte de ces deux ingrédients. Après l'avoir laiſſée durant une heure à découvert, on la paitrit de nouveau; ce que feſant, on la trouva chaude vers le milieu, de façon qu'elle affectoit l'ordorat. Là deſſus on la lia bien ferme dans de la toile groſſiere, après l'avoir encore ſaupoudrée d'un peu de noir tout ſec. Ainſi empaquetée on la mit dans la caiſſe qui avoit été préparée dans le laboratoire, & dont il a été parlé à l'entrée de cette diſſertation. Après qu'elle y eût repoſé durant 3 heures & demie, on ſentit l'odeur de l'huile bouillante, & le paquet devint chaud. La chaleur alla en augmentant pendant deux heures, après quoi elle diminua. Ayant ouvert le paquet le lendemain matin, je ne m'apperçus d'aucun changement dans la maſſe. Je l'enveloppai de nouveau, & la mis en lieu de ſûreté. Le 3 de Juillet je rouvris le paquet, & je trouvai que la maſſe avoit contracté extérieurement une croute ſeche, & intérieurement une couleur griſâtre: expoſée à l'air libre, elle s'échauſa ſenſiblement; mais elle perdit ſa chaleur au bout de quelques heures.

Hui-

Huitieme expérience.

Une autre maſſe de 3 livres de noir de Ruſſie & de 2 livres d'huile de chénevis cuite, paitrie & préparée de la même maniere, & miſe en même tems que la précedente dans la caiſſe, demeura froide.

Neuvieme expérience.

Trois livres de noir de Ruſſie, ayant été mêlées avec une livre d'huile de chénevis cuite, le tout ayant été bien paitri, puis au bout d'une heure empaqueté comme ci-deſſus, après avoir été ſaupoudré de noir ſec; on ne s'apperçut pas de la moindre réaction dans cette maſſe.

Dixieme expérience.

Le 12 de Mai. Trois livres de noir de Ruſſie furent paitries avec $1\frac{1}{2}$ livre d'huile de chénevis cuite, & le tout fut traité & préparé comme dans les expériences précédentes. Mais la maſſe ne devint ni plus ni moins chaude qu'elle ne l'étoit.

Onzieme expérience.

Le 14 de Mai. Pour eſſayer ſi la ſuie & l'huile en plus grande quantité ne ſeroient pas mieux diſpoſées à s'échauſer & s'enflammer enſemble qu'en moindre quantité, comme il arrive ordinairement à des tas de foin & à d'autres matieres ſemblables; j'ouvris toutes les maſſes précédentes qui étoient demeurées froides jusqu'à celle qui avoit ſervi à la dixieme expérience incluſivement ce qui fit une maſſe totale de plus de 30 livres; je la pai-

tris, la laiſſai une couple d'heures à l'air, la ſerrai bien ferme dans un ſac de toile, & mis le ſac en lieu de ſureté dans le laboratoire en cas d'inflammation. Mais pluſieurs ſemaines ſe paſſerent ſans que j'y remarquaſſe le moindre changement.

Douzieme expérience.

Le 15 de Mai. On paitrit 3 livres de noir de Ruſſie avec $1\frac{1}{2}$ livre d'huile de lin cuite, & $1\frac{1}{2}$ once de naphte d'Aſtracan: la maſſe fut poſée auſſi tôt ſur une piece de toile, ſaupoudrée abondamment de noir ſec, liée bien ferme dans de la toile, & miſe dans la caiſſe. Elle ne s'échauffa point.

Comme je ne pouvois faire parvenir jusqu'au degré d'ignition la chaleur des maſſes de ſuie & d'huile ſemblables à celles qui s'étoient le plus fréquemment enflammées dans les expériences de Cronſtadt, & qui, d'après les indices que m'en fournit Mr. l'Académicien *Euler*, conſiſtoient en $1\frac{1}{2}$ l. d'huile ſur 3 l. de noir; je conclus de là que la faute en étoit ou aux matériaux ou à la manipulation. C'eſt pourquoi je tâchai d'obtenir pour mes expériences les mêmes matelots que l'on avoit employés à Cronſtadt pour faire les mêlanges. Mais au lieu de matelots on m'envoya de la ſuie & de l'huile pour une mixtion: il y avoit 3 livres de noir de Ruſſie & 4 livres d'huile de chénevis, au lieu d'une livre & demie que je croyois requiſe. Après un léger examen, je trouvai que ces matériaux ne différoient en aucune façon des miens.

Treizie-

Treizieme expérience.

Le 20 de Mai. Je paitris les 3 l. de noir de Ruſſie que j'avois reçues de l'Amirauté avec $1\frac{1}{3}$ l. de l'huile de chénevis qui m'avoit été envoyée en même tems: je laiſſai la maſſe pendant une heure à découvert, & procédai pour tout le reſte comme dans ma 7e expérience. J'avois retenu un peu du même noir pour en parſemer la maſſe. Ce paquet demeura auſſi ſans réaction; ce qui ne ſeroit pas arrivé, ſi j'y euſſe mis toute l'huile qui m'avoit été envoyée, comme je le reconnus du depuis par d'autres expériences.

Quatorzieme expérience.

Pour comparer mes matériaux avec ceux de l'Amirauté, je pris des miens la même quantité que dans la 13e expérience, & procédai en général comme dans la 7e & 13e expérience; mais ſans ſuccès.

Quinzieme expérience.

Le 24 de Mai. Sur 4 l. de noir de Ruſſie furent verſées 2 l. d'huile de chénevis cuite, & le tout fut mêlé légerement. La ſuie reſta ſeche en grande partie après avoir englouti l'huile. Ce mélange fut mis à découvert dans le baſſin de bois & dans la caiſſe à expériences. Au bout de 9 heures on ſentit une odeur déſagréable & fétide d'huile bouillante, & un peu de chaleur. Cette chaleur augmenta durant 3 heures, & fut accompagnée de vapeurs aqueuſes qui s'élevoient de la maſſe. Après quoi la chaleur ſe perdit inſenſiblement, & il ne ſe fit plus d'autre changement.

Seizieme expérience.

Le 26 de Mai. Quatre livres de noir de Ruſſie, ayant été bien mêlées avec 3 l. d'huile de chénevis cuite, ſans que l'on eût cependant paitri ces matériaux, on mit d'abord la maſſe dans de la toile groſſiere, puis dans la caiſſe. Point de ſuccès.

Dix-ſeptieme expérience.

Le 1 de Juin. On verſa lentement & uniformément 5 l. d'huile de chénevis cuite, ſur 3 l. de noir de Ruſſie. La ſuie engloutit tout le vernis, de façon qu'il n'en reſta point à décanter. Au bout de 5 h ſans mêler d'avantage cette compoſition, on l'enveloppa de toile groſſiere. Elle conſiſtoit en un grand nombre de petites maſſes humides & en partie mollaſſes qui étoient entourées d'un peu de ſuie demeurée à ſec: le tout étoit froid. Et c'eſt dans cet état que la maſſe entiere fut miſe dans la caiſſe à expériences. Seize heures après avoir été imbibée & 11 après avoir été enveloppée, elle commença à odorer & à s'échaufer. Au bout d'une heure encore il y eut quelques places dont la chaleur étoit à peu près la même que celle que l'on ſent ſous une poule qui couve: les exhalaiſons qui en ſortoient étoient viſibles: à d'autres endroits au contraire le paquet étoit froid. Après l'intervalle d'une demi-heure, l'une de ces places chaudes, de la grandeur environ d'une piece de demi-rouble, devint brune, & quelques moments après on la vit incandeſcente: elle s'étendoit inſenſiblement & gagnoit un peu par ſes bords. Au bout d' $\frac{1}{4}$ d'heure il en arriva autant à une ſeconde place, & bientôt après à une troiſieme.

Toutes

Toutes trois étoient rouges comme de la braiſe, & il en ſortoit une fumée épaiſſe de couleur griſâtre, & d'une odeur moins fetide que n'avoit été celle de la maſſe entiere au commencement de la réaction. La chaleur du paquet n'étoit pas égale de toutes parts.

La maſſe ayant été ôtée de la caiſſe & transportée dans un air plus libre, le feu ſe dévéloppa, formant une flamme de la hauteur d'un empan, mais peu vive, tranquile, & qui donnoit beaucoup de fumée.

Ayant fait une ouverture à une place qui ne bruloit pas, je tirai du milieu du paquet une petite portion de la maſſe; je la trouvai chaude, mais non ardente, molle, d'un noir luiſant, d'une odeur forte & répugnante. Quand je feſois des ouvertures dans la maſſe, en la piquant, il en ſortoit peu après une fumée fuligineuſe, qui s'allumant d'elle-même, bruloit en flamme. Et en général le feu n'étoit proprement partout qu'à la ſurface, où ſe feſoient des crèvaſſes: il ſortoit de ces crevaſſes des exhalaiſons épaiſſes, qui en s'allumant formoient la flamme. Je n'ai point vu que la maſſe ſe ſoit gouflée ſenſiblement, ſoit pendant la réaction ſoit pendant l'ignition. Environ au bout d'une heure les flammes s'éteignirent, & la maſſe ne fit plus que bruler en braiſe. Mais lorsque pour la dégager de ſes cendres, on l'eut pouſſée de la planchette qui la ſoutenoit, ſur les paves de la chambre, & qu'elle ſe fut par là un peu éparpillée, elle jetta ſubitement une flamme violente, jusqu'à 3 pieds de hauteur, qui donna une fumée épaiſſe & abondante. Après quoi cette grande flamme diminua peu à peu, & le feu fut

réduit de nouveau à la ſimple incandeſcence, d'abord avec fumée, & enfin ſans fumée. Au bout de huit heures tout fut conſumé. Les cendres étoient griſes tirant ſur le noir, & aſſés compactes: elles peſoient $5\frac{1}{2}$ onces.

Dix-huitieme expérience.

Le 4 de Juin. Je répétai l'expérience précédente avec la même quantité de matieres, je verſai le vernis d'huile de chénevis ſur le noir de fumée ſans mêler autrement ces matieres, & procédai en tout comme ci-deſſus. Cinq heures après l'opération la maſſe fut trouvée froide; je l'enveloppai & la poſai dans la caiſſe. Ce ne fut que 40 heures après avoir été imbibée & 35 après avoir été enveloppée qu'elle commença à s'échaufer & à répandre de l'odeur. La chaleur alla en augmentant pendant 4 heures, de maniere que l'incandeſcence ſpontanée ſe manifeſta 44 heures après l'imbibition. Cette incandeſcence & la flamme qui s'enſuivit, & qui dura huit heures, préſenterent des phénoménes exactement ſemblables à tout ce qui arriva dans la 17e expérience. Les cendres peſereut cette fois-ci $5\frac{1}{2}$ onces & 1 ſcrupule.

Dix-neuvieme expérience.

Le 10 de Juin. Ayant mis dans la jatte ou le baſſin de bois 3 l. de noir de Ruſſie, je verſai deſſus lentement & uniformément 5 l. d'huile de lin, qui avoit été cuite en vernis avec $2\frac{1}{2}$ onces de minium: puis je procédai en tout, tant par rapport aux intervalles de tems que par rapport à la manipulation comme dans la 17e & 18e expérience. Lorſque j'enveloppai la maſſe, je la trouvai plus pénétrée du fluide que celles que j'avois faites

faites avec de l'huile de chénevis cuite, & où une partie de la ſuie étoit demeurée à ſec. Dix-ſept heures après la mixtion, & 12 heures après l'enveloppement la maſſe ſe mit en réaction, & devint chaude & odorante. La chaleur alla en augmentant durant deux heures conſecutives, puis elle diminua, & il ne s'enſuivit point d'autre changement.

Je ne doute pas que l'inflammation ſpontanée n'eût eu lieu, ſi j'euſſe répété cette expérience avec un peu moins de vernis à l'huile, ou, peut-être même ſans cela dans un tems ſec (car c'étoit un jour de pluie). Je ſoupçonne que l'huile de pavot, celle de noix, & toute autre huile à vernis ou ſiccative produiroit le même effet.

Vingtieme expérience.

Le 16 de Juin. Ayant pris 3 l. de noir de fumée de Ruſſie, j'y fis imbiber lentement 4 l. d'huile d'olive, qui avoit été cuite en maniere de vernis jusqu'à l'évaporation de toute aquoſité, quoique par elle-même, & ſans chaux de plomb. Lorsqu'au bout d'une heure je voulus envelopper cette maſſe comme de coutume dans de la toile groſſiere, je la trouvai toute molle, & ſans aucun reſte de ſuie ſeche. C'eſt pourquoi je la ſaupoudrai abondamment d'autre ſuie toute ſeche, & la mis dans la caiſſe. Mais il ne s'y manifeſta pas le moindre changement.

Vingt & unieme expérience.

Le 17 de Juin. Je croyois avoir remarqué que l'inflammation ſpontanée exigeoit de petites maſſes de ſuie imbibées d'huile & entourées de ſuie ſeche. C'eſt pourquoi je

je fis imbiber 2 l. d'huile d'olive cuite dans 3 l. de ſuie de Ruſſie, ce qui produiſit les maſſes ou globules en queſtion, & laiſſa une partie de la ſuie à ſec. Au reſte je procédai en tout comme dans la 20e expérience; mais après avoir attendu pluſieurs jours, je me vis fruſtré de tout ſuccès.

Vingt-deuzieme expérience.

Le 20 de Juin. Je répandis 2 l. d'huile de térébentine, qui eſt la moins conteuſe des huiles eſſentielles, ſur 2 l. de ſuie de Ruſſie. Celle-ci engloutit promptement l'huile. Au bout d'une heure je mêlai l'une avec l'autre, & je trouvai ma mixtion compoſée de petits amas qui ne feſoient point une maſſe continue. Je la mis dans de la toile, puis dans la caiſſe; elle y demeura froide & ſans mouvement.

Vingt-troiſieme expérience.

Le 23 de Juin. Pour faire un nouvel eſſai avec une huile empyreumatique, je mis dans la jatte 3 l. de ſuie de Ruſſie, & je verſai lentement deſſus 3 l. de *Dioggot* de Ruſſie, c'eſt à dire d'huile ou de goudron de bouleau (que l'on fait diſtiller *per deſcenſum* dans des creux faits dans la terre, ſe ſervant à cet effet de l'ecorce du bouleau). Je laiſſai cette compoſition à decouvert pendant 2 heures: puis voulant l'envelopper, j'en trouvai l'odeur plus forte qu'auparavant & je la ſentis tiede. Sans la mêler d'avantage, je la mis dans la caiſſe: la chaleur s'y augmenta d'abord, mais au bout d'une heure elle com-

commença à diminuer, & trois heures s'étant encore écoulées, toute chaleur fut diſſipée.

Vingt-quatrieme expérience.

Je pris de la ſuie de cheminée ou de cuiſine toute pure & provenue de bois de bouleau, (ce bois étaut ici le plus commun pour le chauſage). Elle conſiſtoit en petits amas ſecs, poreux, ſans luſtre: je la fis pulvériſer par le pilon & le crible, de façon que j'en obtins une poudre très fine. J'en mis 3 livres dans la jatte, & je verſai deſſus $1\frac{1}{2}$ l. d'huile de chénevis cuite, qui fut auſſitôt engloutie Après avoir laiſſé le tout pendant 2 h. à découvert, & voulant enſuite l'envelopper, je trouvai que je pouvois décanter environ 1 once d'huile qui ne s'etoit pas incorporée avec la ſuie. Je ſaupoudrai encore ma maſſe glaireuſe d'une demi-livre de ſuie de cheminée pulvériſée, & l'ayant enveloppée, je la mis dans la caiſſe. Elle demeura auſſi froide & inactive qu'elle l'avoit été.

Vingt-cinquieme expérience.

Le 26 de Juin. Voulant avoir une maſſe moins molle, je pris 3 l. de ſuie de cheminée pulvériſée: je ne verſai deſſus qu'une livre d'huile de chénevis cuite, & procédai au reſte comme dans l'expérience précédente. Pour ſaupoudrer cette maſſe, qui ne laiſſa pas d'être humectée d'outre en outre, il me falut encore une 4ᵉ livre de poudre de ſuie. En l'enveloppant après qu'elle eut repoſé pendant une heure, je trouvai qu'elle avoit contracté un peu de chaleur, mais à peine juſqu'à la tiédeur.

Ce commencement de chaleur ſe perdit bientôt & ne revint plus.

Vingt-ſixieme expérience.

Je répandis une boëte à noir de fumée d'Allemagne dans ma jatte, & quoiqu'il n'y en eût qu' $\frac{3}{4}$ de livre, le vaſe en fut plus rempli que de 3 l. de ſuie de Ruſſie; j'y verſai autant d'huile de chénevis cuite que la ſuie en put humer, ce qui alla jusqu'à $2\frac{1}{2}$ l. La mixtion étant reſtée à découvert pendant 2 heures & allant être enveloppée, ſe trouva toute molle. C'eſt pourquoi je la ſaupoudrai préallablement d'un peu de ſuie ſeche. Elle demeura pluſieurs jours dans la caiſſe ſans le moindre changement.

Vingt-ſeptieme expérience.

Le 4 de Juillet. Comme il me ſembloit qu'il y avoit eu trop d'huile d'employée dans la 26[e] expérience, je pris à 10 h. du matin $\frac{3}{4}$ de livre de noir de fumée d'Allemagne, & y verſai $1\frac{1}{2}$ l. d'huile de chénevis cuite, procédant au reſte comme ci-devant. Cette mixtion demeura froide jusqu'au 7[e] du mois, qu'elle commença à 7 heures du matin à s'échaufer & à odorer. A 9 heures le paquet fut déja aſſés chaud pour répandre des exhalaiſons humides, viſibles, & qui ſembloient trembler. Cette chaleur dura à peu près au même degré pendant 6 heures, après quoi elle diminua; & ce ne fut qu'au 8[e] du mois vers le ſoir qu'elle ſe perdit entierement. Le 9 de Juillet j'ouvris le paquet, & j'y vis une maſſe comme fondue, visqueuſe, & d'un noir luiſant. D'où l'on voit que la reaction ne commença qu'au bout de près de 3 jours entiers,

entiers, & dura 36 heures. Il n'eſt point à douter que je n'euſſe obtenu le degré de réaction néceſſaire à l'inflammation ſpontanée, en feſant encore quelques eſſais avec moins d'huile ou avec une plus grande quantité de ſuie.

Vingt-huitieme expérience.

Le 8 de Juillet. Je réïtérai la 17ᵉ & 18ᵉ expérience avec toute l'exactitude poſſible. Lorſqu'au bout de 5 heures on enveloppa la matiere, elle ſe trouva tiede, & commença à affecter l'odorat. La chaleur augmenta pendant 4 heures, après quoi elle diminua, de maniere qu'au bout de 14 heures, il n'y en eut plus du tout. Le 10 du mois, au matin, la maſſe redevint chaude, & le fut pendant tout le jour & la nuit ſuivante: enfin elle ſe refroidit vers la pointe du jour, pour ne plus jamais ſe réchaufer.

On remarquera qu'ici, environ 40 heures après le mêlange, & 20 après la fin de la premiere reaction, il s'en fit une ſeconde, qui dura plus de 12 heures. La maſſe enfin réfroide fut ſemblable à celle de l'expérience précédente, à la réſerve d'un peu plus de ténacité.

Vingt-neuvieme expérience.

Le 12 de Juillet. La 17ᵉ & 18ᵉ expérience avoient été faites dans un tems ſerein; la 19ᵉ & 28ᵉ au contraire, où la réaction n'alla pas juſqu'au degré de l'ignition, avoient été exécutées pendant des jours pluvieux. Cette fois-ci, voyant que le jour étoit beau, je ré-

pétai le même procédé avec la derniere exactitude, en prenant de l'huile de chénevis cuite, avec cette ſeule différence, que la ſuie de Ruſſie, après avoir été imbibée d'huile, ne demeura que pendant 4 heures expoſée à l'air libre. En enveloppent la mixtion à 1 heure après midi dans de la toile, je la trouvai tiede & odorante. Elle conſerva cette même tiédeur jusqu'à 4 h. après-midi, après quoi elle s'échauffa de plus en plus & très promptement, répandant une odeur plus forte, & des exhalaiſons humides. A 7 h. du ſoir, c'eſt à dire 10 heures après le mêlange, & 6 h. après l'enveloppement, on vit ſubitement une épaiſſe fumée, qui fut immédiatement ſuivie de l'incandeſcence. La flamme jaillit bientôt, & dura quelques heures: enfin l'incandeſcence continua ſans flammes jusqu'au lendemain à midi, ce qui fait en tout une ignition de 17 heures. La cendre peſa 4 onces, 3 dragmes.

Trentieme expérience.

Le 14 de Juillet. Ayant mis dans la jatte 3 l. de ſuie de Ruſſie, je verſai deſſus 3 l. d'huile de chénevis crue, la répandant lentement & uniformément, ſans mêler d'avantage les matieres: je procédai au reſte comme dans la 17e expérience, hormis que la maſſe fut enveloppée au bout de 4 heures: elle formoit des amas de ſuie imbibés d'huile, & comme enſevelis dans le reſte de la ſuie qui étoit demeurée ſeche. La réaction commença 5 heures après le mêlange & 1 heure après l'enveloppement: elle alla en augmentant durant 5 heures conſécutives. La chaleur augmenta à proportion, auſſi bien que les exhalaiſons viſibles qu'elle feſoit monter, & qui (à ce que je vis

je vis par des eſſais que j'avois déja faits & que je fis encore) ne ſe laiſſoient pas allumer par du papier brulant. Quatre autres heures s'étant écoulées, c'eſt à dire 13 heures après l'imbibition, la mixtion ſe mit à fumer & à s'enflammer. Ce fut une flamme foible, & comme mourante, qui ne dura que peu; mais l'incandeſcence continua pendant plus de 12 heures. La cendre étoit d'un gris noirâtre & peſoit 16 onces, 6 dragmes.

Trente & unieme expérience.

Le 16 de Juillet. D'après les indices que Mr. *J. A. Euler*, membre de l'Académie, me donna touchant les expériences de l'Amirauté, ſelon leſquelles l'inflammation ſpontanée devoit ſe manifeſter le plus ſûrement dans des mixtions compoſées de deux parties de ſuie de Ruſſie & d'une partie d'huile cuite, j'étois porté à croire que j'avois manqué dans la manipulation pour ma 7, 9, 13 & 14e expérience. C'eſt pourquoi je les répétai, en obſervant le procédé de la 17e. Je fis imbiber $1\frac{1}{2}$ l. d'huile de chénevis cuite dans 3 l. de ſuie de Ruſſie: au bout de 4 heures j'enveloppai la matiere dans de la toile, &c. 7 heures après le melange, elle s'échauffa & odora, mais l'un & l'autre aſſés foiblement. Elle reſta durant quelques heures dans cet état, après quoi elle redevint froide à jamais.

Trente-deuzieme expérience.

Le 19 de Juillet. La mixtion précédente me paroiſſoit un peu ſeche, & les petits amas de ſuie n'avoient été que peu imbibes. C'eſt pourquoi je verſai encore

e 3 deſſus

deſſus $\frac{5}{4}$ de livre d'huile de chénevis cuite: je renveloppai le mêlange & le remis dans la caiſſe. Au bout de 11 heures le paquet devint chaud & odorant: l'incandeſcence commença 16 heures après l'imbibition. Pendant 6 heures il brula ainſi ſans flammes, avec une fumée épaiſſe & griſâtre tirant ſur le blanc. Après quoi il continua encore à ſcintiller & bruler en flammeche pendant 6 autres heures. La cendre peſoit 7 onces, 3 dragmes.

Trente-troiſieme expérience.

Le 21 de Juillet. Pour trouver la moindre quantité de matiere capable de produire l'inflammation ſpontanée, je fis cette 33e expérience avec 1 l de ſuie de Ruſſie, imbibée d'1 $\frac{1}{2}$ l. d'huile de chénevis cuite: au bout d'une heure je l'enveloppai dans de la toile & la mis dans la caiſſe: mais je n'y remarquai aucun changement.

Trente-quatrieme expérience.

Le 24 de Juillet. Une livre de noir de Ruſſie, ayant été imbibée de $\frac{5}{4}$ l. d'huile de chénevis cuite, fut auſſitôt enveloppée de toile & miſe dans la caiſſe. Après l'eſpace de 6 heures elle devint tiede & odorante; mais la tiédeur & l'odeur ſe perdirent à la fois au bout de quatre autres heures.

Trente-cinquieme expérience.

Le 26 de Juillet. Une livre de noir de Ruſſie, fut imbibée d'une quantité pareille d'huile de chénevis cuite, & miſe au bout de 3 heures dans la caiſſe, étant enveloppée de

de toile. Six heures après le mêlange, elle s'échauffa ſenſiblement; mais au bout de 2 heures elle ſe refroidit.

Trente-ſixieme expérience.

Le 29 de Juillet. Une livre de noir de fumée de Ruſſie, ayant été imbibée d'$\frac{3}{4}$ de livre d'huile de chénevis cuite, fut enveloppée de toile au bout de 2 heures; ce que feſant, je trouvai qu'un ſeul des amas qui s'étoient formés, avoit contracté quelque chaleur. Après que ce paquet eut repoſé 2 heures dans la caiſſe, l'odeur accoutumée ſe fit ſentir avec une chaleur générale, qui s'augmenta bientôt. Six heures après le mélange, s'enſuivit l'incandeſcence ſans flammes qui dura 8 heures; & enfin le réſidu de cendres peſa 6 onces, 6 dragmes.

Trente-ſeptieme expérience.

Le 6 d'Aout. J'ouvris tous les paquets qui n'étoient par parvenus jusqu'à l'ignition, & je trouvai que les maſſes qui avoient été en réaction étoient devenues plus uniformes, plus gluantes, & plus molles, tandis que celles qui étoient demeurées tout à fait inactives, ne s'étoient qu'un peu deſſechées. Je fis faire un mélange uniforme de toutes ces compoſitions differentes: j'en employai une partie à des expériences d'un autre genre, & je partageai le reſte en deux portions égales. J'en mis une moitié dans un pot que je couvris négligemment, & que je poſai à un endroit ſûr & tranquile du laboratoire: mais cette maſſe qui peſoit 25 livres demeura inactive.

Trente-

Trente-huitieme expérience.

Je mis l'autre moité du même reſte dans un pot ſemblable au précédent: comme la maſſe étoit, auſſi bien que la premiere moitié, un peu molle, je jettai encore deſſus 1 l. de ſuie de Ruſſie; puis je couvris le tout légerement d'une planchette. Mais dans l'eſpace de pluſieurs ſemaines, il ne s'y montra pas le moindre changement.

Du depuis j'ai répété pluſieurs fois la 17e & 32e expérience, & toujours heureuſement, avec cette ſeule différence que l'intervalle de tems qui s'écoula depuis le mêlange jusqu'à l'inflammation ne fut pas toujours égal, ayant été plus court dans un temps ſerein, & plus long dans des tems de pluie.

Je paſſe ſous ſilence pour le préſent les expériences que j'ai faites avec les cendres qui ſont reſtées après les inflammations précédentes, & avec ces mêmes mixtions par diſtillation &c.

Et afin que l'on puiſſe comparer d'une ſeule vue mes expériences entre elles & avec celles de l'Amirauté je les rangerai ici en forme de table, y ajoutant le tems qu'il a fait pendant que je m'en ſuis occupé.

Table

Table de pluſieurs Expériences concernant l'inflammation ſpontanée du noir de fumée avec différentes huiles.

Expérience.	Beau & mauv. tems.	Noir de fumée.	Huile.	Maniere de mêler.	Tems de l'enveloppement après le mêlange.	Succès, & Remarques.
1.	Pluvieux.	Noir de Ruſſe 1 ℔.	Huile de lin crue, 1 ℔.	Simplement mêlé.	A découvert & non enveloppé.	Point de changement.
2.	Pluvieux.	Noir de Ruſſie 1 ℔.	Huile de chenevis crue, 1 ℔.	Mêlé.	A découvert.	Point de changement.
3.	Pluvieux.	Noir de Ruſſe 1 ℔.	Huile d'olive crue, 1 ℔.	Mêlé.	A découvert.	Point de changement.
4.	Pluvieux.	Noir d'All. ou d'Hollande. 1 ℔.	Huile de lin crue, 3 ℔.	Mêlé.	A découvert.	Point de changement.
5.	Pluvieux.	Noir d'Allem. 1 ℔.	Huile de chenevis crue, 3 ℔.	Mêlé.	A découvert.	Point de changement.
6.	Pluvieux.	Noir d'Allem. 1 ℔.	Huile d'olive crue, 3 ℔.	Mêlé.	A découvert.	Point de changement.

Experience.	Beau & mauv. tems.	Noir de fumée.	Huile.	Maniere de mêler.	Tems de l'enveloppement après le mélange.	Succès, & Remarques.
7.	Pluvieux.	Noir de Ruſſie, 3 ℔.	Huile de chenevis, cuite, $1\frac{1}{2}$ ℔	Paitri.	Enveloppé de toile au bout d'1 hr.	Chaud après $3\frac{1}{2}$ heures, puis refroidi.
8.	Pluvieux.	Noir de Ruſſie, 3 ℔.	Huile de chenevis, cuite, 2 ℔.	Paitri.	Enveloppé au bout d'1 heure.	Point de changement.
9.	Pluvieux.	Noir de Ruſſie, 3 ℔.	Huile de chenevis, cuite, 1 ℔.	Paitri.	Enveloppé au bout d'1 heure.	Point de changement. Voyez la 7e Expérience.
10.	Sec.	Noir de Ruſſie, 3 ℔.	Huile de lin, cuite, $1\frac{1}{2}$ ℔.	Paitri.	Enveloppé après 1 h.	Point de changement.
11.	Sec.	Noir de Ruſſie & d'Allem. environ 15 ℔.	Huile de chenevis, de lin, & d'ol. envir. 17 ℔.	Paitri.	Enveloppé au bout de 2 heures.	Point de changement. C'étoit un aſſemblage des maſſes précédentes.
12.	Serein.	Noir de Ruſſie, 3 ℔.	Huile de lin, cuite, $1\frac{1}{2}$ ℔. & Naphte $1\frac{1}{2}$ once.	Paitri.	Enveloppé auſſitôt.	Point de changement.

Ex-

Experience.	Beau & mauv. tems.	Noir de fumée.	Huile.	Maniere de mêler.	Tems de l'enveloppement après le mélange.	Succès, & Remarques.
13.	Pluvieux.	Noir de Ruſſie, 3 ℔.	Huile de chenevis, cuite, $1\frac{1}{2}$ ℔.	Paitri.	Enveloppé au bout d'1 heure.	Point de ſuccès. C'étoient les matériaux de l'Amirauté.
14.	Pluvieux.	Noir de Ruſſie, 3 ℔.	Huile de chenevis cuite, $1\frac{1}{2}$ ℔	Paitri.	Enveloppé au bout d'1 heure.	Point de ſuccès. C'étoit de mes matériaux que je voulois comparer avec les précedents.
15.	Pluvieux	Noir de Ruſſie, 4 ℔.	Huile de chenevis cuite, 2 ℔.	Mêlé.	Non enveloppé.	Echauffé au bout de 9 heures, puis refroidi.
16.	Serein.	Noir de Ruſſie, 4 ℔.	Huile de chenevis cuite, 3 ℔.	Mêlé.	D'abord enveloppé.	Point de changement.
17	Serein.	Noir de Ruſſie, 3 ℔.	Huile de chenevis cuite, 5 ℔.	Imbibé.	Enveloppé au bout de 5 h.	En feu au au bout de 18 h. après le mélange.

Expérience.	Beau & mauv. tems.	Noir de fumée.	Huile.	Maniere de mêler	Tems de l'enveloppement après le mêlange.	Succès, & Remarques.
18	Serein.	Noir de Ruſſie, 3 ℔.	Huile de chenevis cuite, 5 ℔.	Imbibé.	Enveloppé au bout de 5 heur.	En feu au bout de 44 h. après la mixtion. V. la 17. Exper.
19.	Serein.	Noir de Ruſſie, 3 ℔.	Huile de lin cuite, 5 ℔.	Imbibé.	Enveloppé au bout de 5 h.	Chaud au bout de 17 h. après la mixtion, puis froid.
20.	Serein.	Noir de Ruſſie, 3 ℔.	Huile d'ol. cuite, 4 ℔.	Imbibé.	Enveloppé au bout d'1 h.	Point de changement.
21.	Serein.	Noir de Ruſſie, 3 ℔.	Huile d'ol. cuite, 2 ℔	Imbibé.	Enveloppé au bout d'1 h.	Point de changement.
22.	Serein.	Noir de Ruſſie, 2 ℔.	Huile de térébentine 2 ℔.	Mêlé.	Enveloppé au bout d'1 h.	Point de changement.
23.	Serein.	Noir de Ruſſie, 3 ℔.	Huile de bouleau ou D[illegible]gar, 3 ℔.	Imbibé.	Enveloppé au bout de 2 h.	Chaud pendant l'enveloppement, puis froid au bout de 2 h.

Ex-

Expérience.	Beau & mauv. tems.	Noir de fumée.	Huile.	Maniere de mêler.	Tems de l'enveloppement après le mélange.	Succès, & Remarques.
24.	Serein.	Suie de cheminée, 3½ ℔.	Huile de chenevis cuite, 1½ ℔.	Imbibé.	Enveloppé au bout de 2 h.	Point de changement.
25.	Serein.	Suie de cheminée, 4 ℔.	Huile de chenevis cuite, 1 ℔.	Imbibé.	Enveloppé au bout d'1 h.	Devint tiede, puis froid.
26.	Serein.	Noir d'Allem. ½ ℔.	Huile de chenevis cuite, 2½ ℔.	Imbibé.	Enveloppé au bout de 2 h.	Sans ſuccès.
27.	Serein.	Noir d'Allem. ¾ ℔.	Huile de chenevis cuite, 1½ ℔.	Imbibé.	Enveloppé au bout de 2 h.	S'échauffa après 70 h., & la chaleur dura 36 h.
28.	Pluv.	Noir de Ruſſie, 3 ℔.	Huile de chenevis cuite, 5 ℔.	Imbibé.	Enveloppé au bout de 5 h.	Chaud durant l'enveloppement, puis froid, puis de nouveau chaud au bout de 40 h. Voyez la 17. & 18. Exp.

 Ex-

Expérience	Beau & mauv. tems.	Noir de fumée.	Huile.	Maniere de meler.	Tems de l'enveloppement après le mêlange.	Succès, & Remarques.
29.	Serein.	Noir de Ruſſie, 3 ℔.	Huile de chenevis cuite, 5 ℔.	Imbibé.	Enveloppé au bout de 4 h.	Fut chaud pendant l'enveloppement, & prit feu 13 heur. après le mêlange. V. la 17, 18, & 28. Exper.
30.	Serein.	Noir de Ruſſie, 3 ℔.	Huile de chenevis crue, 3 ℔.	Imbibé.	Enveloppé au bout de 4 h.	S'embraſa 13 h. après le mêlange.
31.	Pluv.	Noir de Ruſſie, 3 ℔.	Huile de chenevis cuite, 1½ ℔.	Imbibé.	Enveloppé au bout de 4 h.	S'échauffa 7 h. après la mixtion, puis ſe refroidit.
32.	Serein.	Noir de Ruſſie, 3 ℔.	Huile de chenevis cuite, 2¼ ℔.	Imbibé.	D'abord enveloppé.	Prit feu au bout de 16 heures.
33.	Serein.	Noir de Ruſſie, 1 ℔.	Huile de chenevis cuite, 1½ ℔.	Imbibé.	Enveloppé au bout d'1 h.	Point de changement.

Ex-

Ex periences.	Beau & mauv. tems.	Noir de fumée.	Huile.	Maniere de meler.	Tems de l'enveloppement après le mélange.	Succès, & Remarques.
34	Serein.	Noir de Ruſſie, 1 ℔.	Huile de chenevis cuite, 1¼ ℔.	Imbibé.	Auſſitôt enveloppé.	Chaud au bont de 6 h. puis refroidi.
35.	Serein.	Noir de Ruſſie, 1 ℔.	Huile de chenevis cuite, 1 ℔	Imbibé.	Enveloppé au bout de 3 h.	S'échauffa 6 h. après la mixtion.
36.	Serein.	Noir de Ruſſie, 1 ℔.	Huile de chenevis cuite, ¾ ℔.	Imbibé.	Enveloppe au bout de 2 h.	Prit feu 6 heures après la mixtion.
37.	Serein.	Reſtes qui n'avoient pa pris feu, environ 25 livres.		Paitri.	Mis auſſitôt dans un pot & couvert.	Point de changement.
38.	Serein.	Reſtes qui n'avoient point pris feu, 25 ℔.		Paitri.	Mis dans un pot, jetté deſſus 1 ℔ de Noir de Ruſſie, & couv.	Point de changement.

L'inflammation ſpontanée de la ſuie avec de l'huile eſt une découverte ſi importante, que l'Amirauté impériale de Ruſſie, & S. E. Mr. le Comte de *Czernischef*, qui en eſt le Vice-Preſident, ne peuvent que s'attendre à la reconnoiſſance de tous les amateurs de Chymie, de Phyſique, & même de ſcience économique, pour avoir publié leurs ob-

obſervations là deſſus. Cette découverte ſert à étendre nos connoiſſances ſur les réactions des corps, ſur la production & la manifeſtation du feu, ſur les précautions néceſſaires pour prévenir des incendies qui pourroient réſulter de négligence ou d'inattention ſur cet objet. Elle mérite auſſi notre attention, en ce que les matieres qui produiſent cette inflammation, étant faciles à aquérir, pourroient devenir des inſtruments dangereux dans les mains des incendiaires; d'autant plus qu'on peut aiſément les placer où l'on veut, & que leur effet n'etant pas d'abord viſible, les ſcélérats qui s'en ſerviroient auroient encore aſſés de tems pour ſe ſauver par la fuite.

Pour ce qui eſt de mes expériences, j'y ai tâché principalement de decouvrir quelles ſont les ſortes de noir de fumée & d'huile qui s'enflamment après avoir été mêlées, en quelle proportion il faut prendre ces deux ſubſtances, comment il faut les mêler & les manier pour qu'elles s'enflamment le plus ſûrement, & en combien petite quantité ces matieres ſont en état de prendre feu. Or à tous ces égards, ſi l'on fait attention aux expériences de l'Amirauté & aux miennes, on pourra en tirer les conſéquences ſuivantes.

Quant à la ſuie, il paroit que les expériences réuſſiſſent mieux avec le noir de fumée commun de ce pays-ci, qui ſemble être un peu gras, qu'avec celui d'Hollande ou d'Allemagne, qui eſt fin & ſec, & qu'avec la groſſiere ſuie de cheminée. Entre les huiles, on n'a trouvé propres à l'inflammation que celles qui ſont tirées des végétaux par expreſſion, & parmi celles-ci il faut prendre les

les plus ſiccatives: elles produiſent l'effet requis, ſoit qu'on les emploie cuites ou crues. Il eſt vrai que toutes les expériences qui ont réuſſi, ont été faites avec de l'huile de chénevis; mais il eſt indubitable, que ſi l'on s'étoit ſervi tout auſſi ſouvent d'huile de pavot, de lin, de noix, ou de toute autre huile ſiccative, les effets auroient été les mêmes. La proportion entre l'huile & la ſuie ne ſauroit être déterminée au juſte. La ſuie s'allume avec une quantité d'huile dont le poids eſt un dixieme, un cinquieme, un tiers, ou l'équipollent, ou même le double du ſien. La proportion la plus ſûre, eſt de prendre un poids égal des deux matieres, ou ſi l'on veut, un peu plus de ſuie, mais plutôt cependant plus d'huile que de ſuie.

Une mixtion légere, ou plutôt une ſimple imbibition de l'huile dans la ſuie, où il arrive qu'une partie de la ſuie demeure ſeche & enveloppe en quelque ſorte de petits amas humides, une pareille imbibition eſt, dis-je, préférable à une mixtion plus intime & au paitriſſement. Quand on mêle les matieres plus intimément, il eſt bon de les ſaupoudrer encore de ſuie ſeche.

L'intervalle de tems depuis la mixtion jusqu'à l'inflammation roule entre 4 & près de 48 heures. Comme je conſervai aſſez long-tems durant mes expériences les maſſes avec leſquelles je les avois faites, je n'aurois pu manquer d'appercevoir le mouvement d'ignition, s'il s'étoit manifeſté plus tard dans les matieres qui ne s'étoient pas d'abord enflammées: il paroit donc que le délai de l'inflammation ne va gueres au delà du terme que je viens de marquer. Il eſt très probable que la réaction de la ſuie &

de l'huile dépend auſſi en grande partie de l'état de l'atmoſphère. Car j'ai vu que des mêlanges, qui s'enflammoient ordinairement ſans faute, ont manqué leur effet dans un tems de pluie, ou du moins ont pris feu beaucoup plus tard que de coutume.

Il n'eſt pas d'une néceſſité indiſpenſable d'envelopper les mixtions dans de la toile groſſiere, mais cela ne laiſſe pas de contribuer beaucoup à aſſûrer l'effet. Les grandes maſſes, quand on ſuit les procédés que nous avons indiqués, s'allument beaucoup plus facilement que les petites, & même quelque fois dans des vaſes, ſans être enveloppées de toile. La raiſon en eſt, que dans les grandes la réaction ſe fait à pluſieurs endroits à la fois, de façon qu'il s'y trouve toujours quelque portion de matiere plus diſpoſée que le reſte à s'échaufer jusqu'au point d'ignition. Cependant dès que l'on a aquis une certaine habitude dans la manipulation, & que l'on obſerve ſoigneuſement toutes les précautions dont dépend la réuſſite, il arrive rarement que des maſſes plus petites vous fruſtrent du ſuccès. Néanmoins quand elles ſont trop petites, la chaleur ne ſauroit aſſés s'accroitre, à cauſe de la réfrigération qui provient de l'air extérieur.

Il eſt vrai que l'on peut compter avec aſſés d'aſſûrance ſur le phénomene de l'inflammation ſpontanée, quand on emploie des matériaux convenables en juſte proportion, obſervant en outre une manipulation aiſée en elle-même, mais indiſpenſable: cependant ce phénomene ne ſe montre pas auſſi fréquemment que l'on pourroit ſe le figurer d'après le ſuccès des expériences: car il ne peut

peut arriver que très rarement que le hazard combine exactement toutes les conditions requiſes; & c'eſt ce qui fait qu'il y a moins à craindre pour les incendies de ce côté là. S'il n'en étoit pas ainſi, pourquoi n'auroit-on jamais jusqu'ici remarqué ou du moins ſoupçonné l'inflammation ſpontanée dont il s'agit, après que l'on a mêlé des millions de fois de la ſuie avec de l'huile? Il faut convenir même que jusqu'à ce jour on n'y auroit peut-etre point fait attention, ſi l'eſprit pénétrant de notre illuſtre Souveraine n'en avoit fait un objet de nouvelles recherches, à l'occaſion de ce qui arriva à Cronſtadt.

Pour ce qui eſt de l'explication de ce phénomene, on pourroit ſe la faciliter en feſant une analyſe exacte des différentes ſortes de ſuie, par les moyens connus de la Chymie. En attendant je me figure que la choſe ſe fait de la maniere ſuivante. Les huiles par expreſſion, autant qu'on a pu s'en inſtruire jusqu'à préſent, conſiſtent dans la combinaiſon de beaucoup de phlogiſtique ou de matiere inflammable avec de l'acide & de l'eau. La ſuie eſt composée d'une terre charbonneuſe, d'une grande portion de phlogiſtique, d'un peu d'acide, & d'alkali volatil. Quand la ſuie a humé l'huile, de façon que l'une ſe trouve en certaine proportion avec l'autre, les principes de ces deux matériaux agiſſent réciproquement les uns ſur les autres, par quoi une partie de la matiere inflammable ſe dégage, & de là ſe forme un air phlogiſtique ou une vapeur chargée de matiere inflammable & d'acide, c'eſt à dire d'une ſorte de ſoufre aërien. Dans un air libre la chaleur ſera réfrigérée à meſure qu'elle ſe forme, & l'air phlogiſtique déja dégagé ſe diſperſera. Une maſſe

conſidérable ſe comprime d'elle-même plus qu'une moindre; la toile comprime encore mieux: ce qui favoriſe la réaction, garantit la chaleur & les principes dégagés d'une trop prompte diſperſion, & modifie l'action de l'air extérieur. La chaleur montée par là juſqu'à un haut degré, & aidée de l'air extérieur, peut faire que la matiere inflammable déja dégagée, & le ſoufre végétal imparfait contenu dans l'air phlogiſtique, aquierent le mouvement d'ignition, & produiſent l'embraſement. Ce qui prouve que l'alkali volatil contenu dans la ſuie contribue auſſi au ſuccès, c'eſt l'odeur fetide qui ſe fait ſentir pendant la réaction, & l'expérience de l'or fulminant, qui s'allume par une friction aſſés légere.

Il paroit que le ſouffre imparfait, diviſé en parcelles ſeparées, ne s'allume pas avec vivacité, ni promptement d'un atome à l'autre, & qu'ainſi il s'éteindroit bientôt, ſi la ſuie ſeche mêlée dans la maſſe ne lui ſervoit comme d'amorce, pour prendre & augmenter le feu. La toile dont la maſſe eſt enveloppée, outre ſon uſage de compreſſion, ſert encore par ſa grande combuſtibilité à favoriſer l'embraſement.

Le célebre Mr. *Marggraf* à Berlin, ayant reçu par Mr. *J. A. Euler*, un avis général de l'evènement arrivé à la flotte, & des expériences que l'Académie avoit commencé à faire là deſſus, répondit le 15 de Juin en ces termes:

“ Quand, pour combiner intimément de la ſuie „ avec de l'huile, on les broye enſemble, & les conſerve „ dans

„ dans un état de compreſſion; il eſt très poſſible que „ le mouvement interne aille au point, que les parties „ conſtituantes de ces ſubſtances ſe ſaiſiſſent réciproque- „ ment, s'echauffent, & prennent même feu à la maniere „ du pyrophore, dès que la matiere enveloppée eſt ex- „ poſée à une promte affluence de l'air extérieur. La „ ſuie contenant des parties inflammables & d'autres uri- „ neuſes, & l'huile de chanvre renfermant un acide na- „ turel avec de la matiere inflammable; il eſt incon- „ teſtable, par des raiſons phyſico - chymiques, que „ dans une maſſe compoſée de ces deux ſubſtances, „ il peut aiſément ſe manifeſter au bout d'un cer- „ tain tems un mouvement d'ignition, & enfin une „ flamme viſible, & cela par l'action & la réaction du „ mouvement interne, qui devient de plus en plus vio- „ lent, & qui par des cauſes accidentelles peut être „ porté jusqu'au plus haut point; d'autant plus qu'il y a „ une quantité abondante de matiere inflammable dans les „ deux corps." L'explication de ce grand Chymiſte auroit été ſans doute encore plus juſte & plus préciſe, s'il eût pu être inſtruit alors du détail des expériences qui ont été faites, & de leur réuſſite.

Les cendres des maſſes conſumées par l'inflammation ſpontanée, ſont fort chargées de particules ferrugineuſes, particulierement quand on s'eſt ſervi d'huile crue avec la ſuie. Je m'occupe encore à analyſer ces cendres. Un mêlange de ſuie & d'huile, qui ne s'étoit point enflammé, ayant été diſtillé à la retorte n'a point produit de pyrophore ni de phenomene lumineux. Je me propoſe

de faire ſur tout cela des recherches ultérieures, dont je publierai les réſultats. En attendant je vais décrire les expériences que j'ai faites ſur l'inflammation ſpontanée du chanvre & du lin avec l'huile; afin de contribuer autant qu'il dépendra de moi à perfectioner le ſyſteme de l'inflammation ſpontanée, & à en faire connoitre les divers genres.

EXPERIENCES
rélatives à l'inflammabilité ſpontanée du chanvre & du lin.

par *Mr. J. G. Géorgi.*

Traduit de l'Allemand

On a pluſieurs exemples d'incendies qui n'ont eu probablement d'autre cauſe que l'inflammation ſpontanée du chanvre, du lin, ou des tiſſus formés de ces matieres végétales. Le terrible incendie arrivé à Rochefort en 1756 ne peut gueres être expliqué autrement. En 1757 le feu prit dans la ville de Breſt à un magazin de prelart, c'eſt à dire de toile à voiles peinte d'un côté d'une couleur compoſée de vernis à l'huile & d'ochre: autant qu'on put s'en inſtruire, on ne put attribuer cet accident à aucune négligence, ni à aucune cauſe extérieure. (Voyez le mémoire de Mr. *Montel* dans l'Hiſtoire de l'Académie de Paris, Année 1760). Dans pluſieurs ports militaires on a vu, non obſtant l'exacte police qui y regne, des incendies dont il a été impoſſible de découvrir les cauſes par les per-

perquiſitions les plus ſoigneuſes & les plus ſéveres. Il y a environ 20 ans, que le feu prit pluſieurs fois à une manufacture de cables établie ici, & à des cabanes faites de poutres: on découvrit enfin que cette manufacture employoit à ſes ouvrages du chanvre qui s'étoit gâté dans un vaiſſeau par des tonneaux d'huile crevaſſés, & que les pauvres gens qui demeuroient dans des maiſonnettes de bois avoient acheté de ce chanvre peu couteux pour en calfater leurs demeures: cependant, comme il y avoit encore d'autres circonſtances ſuſpectes, on ne put rien affirmer poſitivement ſur la cauſe de ces fréquens incendies. Mr. *Schroeter*, qui a toujours été attentif aux événemens qui ſe rapportent à la phyſique, ſe ſouvient d'avoir entendu dire dans ce tems-là, que les cables que l'on avoit faits de ce chanvre humecté d'huile avoient coutume de s'echaufer quand on les accumuloit en grands rouleaux les uns ſur les autres, & qu'on étoit obligé de les diſperſer pour leur donner de l'air. L'incendie terrible de 1780 qui conſuma nos magazins de chanvre, ne peut avoir été l'effet que d'une inflammation ſpontanée ou de la malice la plus impénétrable, vu les précautions qu'on avoit priſes pour éviter de pareils accidents, & la regle qu'on obſerve de ne ſoufrir aucun feu tant ſur l'île où les magazins ſont batis, que ſur tous les vaiſſeaux de la Néva. Les ſoupçons qu'on eut à cette occaſion d'une inflammation ſpontanée porterent Sa Majeſté Impériale à ordonner des recherches phyſiques au ſujet de la fregatte qui prit feu à Cronſtadt (Voyez la Lettre de S. E. Monſieur de Comte de *Czernichef*, à l'Académie des ſciences).

C'eſt

C'eſt ce qui donna lieu aux expériences ſur l'inflammabilité ſpontanée du chanvre que l'amirauté ajouta à celles qu'elle avoit faites ſur la ſuie & l'huile. Comme ces expériences rélatives au chanvre ont été en petit nombre & faites en petit, je vais décrire ici les miennes par rapport au même objet. Il eſt vrai qu'il n'y en a aucune qui m'ait réuſſi juſqu'ici; mais pour ceux qui font des recherches, il n'eſt pas ſuperflu de ſavoir quels ſont les eſſais qui ne réuſſiſſent point, afin qu'ils ne ſe donnent pas la peine de chercher là où on ne ſauroit rien trouver. Il faut encore remarquer que les mois d'Aout & de Septembre pendant leſquels je fis mes premieres obſervations, fournirent preſque toujours un tems ſec; mais les ſuivantes que je fis en Octobre & Novembre, furent pour la plupart accompagnées d'un ciel humide & pluvieux.

Premiere expérience.

Huit aunes de toile de lin de Ruſſie, groſſiere mais blanchie, furent peintes d'un côté moyennant une mixtion broyée d'une demi-livre de ſuie de Ruſſie, & de 3 ℔ de vernis à l'huile; & le jour ſuivant la peinture s'étant paſſablement deſſéchée, on y en mit une ſeconde couche. En triturant la ſuie avec l'huile, on obſerva que le vernis étoit devenu plus odorant qu'auparavant, & durant le premier quart d'heure il s'y forma tant de petites ampoules d'air, que la mixtion en prit une apparence écumeuſe. Le troiſieme jour après que cette toile eut été peinte pour la ſeconde fois, on la mit en rouleau bien ferme, on l'entoura de ficelle, & on la poſa en lieu de ſûreté en cas d'inflammation. Mais il

il ne s'y manifeſta pas la moindre chaleur, ni aucun autre changement. Au bout de 12 ſemaines, on ouvrit ce tapis roulé: la couleur avoit pénétré d'outre en outre la toile qui en étoit devenue fort glutineuſe; mais elle ſe trouva au reſte dans le même état qu'auparavant.

Seconde expérience.

Huit aunes de toile de lin groſſiere furent peintes, comme ci devant à la maniere des tapis, avec une couleur bien broyée, compoſée de 4 ℔ de minium & de 3 ℔ de vernis à l'huile: on y mit deux couches de couleur: puis, la toile étant paſſablement ſeche, on la mit en rouleau. Au bout de 3 mois on trouva le rouleau conſiderablement collé, mais ſans autre changement.

Troiſieme expérience.

On prit 10 ℔ de chanvre commun, qui avoit été bien ſéché au four, & qui avoit perdu par l'exſiccation 8 ℔ ſur le poud, c'eſt à dire un cinquieme de ſon poids. On humecta ces 10 ℔ de chanvre, d'une maniere fort egale, avec ½ ℔ d'huile de chénevis crue: on mit le chanvre en pelotte: on l'enveloppa d'un morceau de natte faite d'écorce de tilleul, de maniere que la natte ne faiſoit qu'une fois le tour: on ſerra le tout auſſi ferme que poſſible avec une corde, & on marqua ce paquet par No. 1. De jour je mettois le paquet au ſoleil & de nuit dans le laboratoire: durant la premiere ſemaine il reçut chaque jour la chaleur du ſoleil. Au bout de 8 ſemaines j'ouvris le paquet, & n'y vis aucun changement, à l'exception d'un peu plus de ſechereſſe.

Quatrieme expérience.

Dix autres livres de chanvre ſéché furent humectées d'une livre d'huile de chénevis crue, & traitées en tout comme le paquet précédent. Le ſuccès ne fut pas meilleur. Ce paquet étoit marqué No. 2.

Cinquieme expérience.

On humecta 10 ℔ de chanvre ſec avec 2 ℔ d'huile de chénevis crue, on les traita comme les paquets précédents qui avoient été numérotés par 1 & 2, & on marqua celui-ci par No. 3. Huit ſemaines ſe paſſerent ſans qu'on y remarquât la moindre altération.

Sixieme expérience.

On prit 10 ℔ de chanvre ſec: on l'imbiba de 4 ℔ d'huile de chénevis crue: il s'empara de toute l'huile & en fut fort mouillé. On en fit un paquet ſemblable aux autres, qui fut marqué No. 4. Il demeura également 8 ſemaines ſans aucun changement.

Septieme expérience.

Six pelottes de chanvre de la groſſeur du poing, furent imbibées de la quantité d'huile de chénevis qu'elles purent humer, ce qui prit 2 ℔ de cette huile. Je diſpoſai ces pelottes dans un tas de 10 ℔ de chanvre ſec, de façon que les unes ſe trouvoient vers le centre, d'autres plus près de la ſurface, d'autres au niveau de la ſurface. Le tout fut mis dans une piece de natte & lié de

cordes.

cordes. J'y mis le No. 5. Il ne s'y fit point de changement. Je fis cette expérience à l'imitation de celles que j'avois faites avec de la ſuie, & où j'avois vu que le ſuccès dépendoit beaucoup de certaines molécules imbibées d'huile, & entourées de matiere ſeche.

Huitieme expérience.

Une natte d'écorce de bouleau fut imbibée de 2 ℔ d'huile de chénevis. Dans cette natte furent enveloppées 10 ℔ de chanvre ſec, que l'on comprima avec des cordes autant que poſſible. Le paquet fut marqué No. 6. Si l'incendie des magazins à chanvre a eu pour cauſe le contact du chanvre & de l'huile, cette huile ne pouvoit y avoir été introduite que par des nattes huilées. Cependant ce paquet, ayant été ouvert au bout de 7 ſemaines, ne montra aucun ſigne de changement. Seulement le chanvre avoit contracté une odeur très forte de renfermé ou de relant, ce que j'avois auſſi obſervé dans les expériences précédentes.

Je ne fis point pour cette fois d'expériences avec des huiles cuites ou des vernis, parceque ces vernis ne peuvent gueres ſe trouver en contact avec le chanvre ou le lin ſoit dans des magazins, ſoit dans des vaiſſeaux, & y cauſer du dommage.

Il eſt connu que le foin ou le blé quand il eſt humide & entaſſé en grande quantité, s'échauffe & s'enflamme quelque fois. Ceci pourroit auſſi arriver au

 chanvre

chanvre & au lin, quand il y a des ballots qui tombent dans l'eau, qui ſont humectés par la pluie ou mouillés de quelque maniere que ce ſoit. Par cette raiſon je fis les expériences ſuivantes.

Neuvieme expérience.

Je pris 10 ℔ de chanvre très ſec, je l'humectai uniformément & également de 2 ℔ d'eau, je le liai bien ferme dans une natte ſimple d'écorce, je marquai le paquet No. 7, & le poſai dans le laboratoire. Il ne s'en ſuivit point de changement. Au bout de 7 ſemaines le paquet fut ouvert, il en ſortit une odeur de relant très forte, & le chanvre étoit devenu friable par la moiſiſſure: il n'avoit ſubi d'autre altération depuis que je l'eus empaqueté.

Dixieme expérience.

10 ℔ de chanvre, ayant été imbibées d'une maniere uniforme de 5 ℔ d'eau de Néva, empaquetées comme précédemment, & marquées No. 8; il ne s'y manifeſta aucun changement. Le paquet ayant été ouvert au bout de 7 ſemaines, le chanvre ſe trouva fort blanc, & ſi friable qu'à l'aide d'un bâton on pouvoit preſque le broyer; il n'étoit pas ſeulement aiſé de le déchirer, mais auſſi de le caſſer. L'odeur de relant étoit très ſenſible. Je le remis en paquet pour voir s'il s'y manifeſteroit d'autres changements.

Onzieme expérience.

Je verſai peu à peu 10 ℔ d'eau de Néva ſur 10 ℔ de chanvre ſec, qui en devint fort mouillé, ſans qu'on

qu'on pût néanmoins en exprimer l'eau à la main. Je l'emballai comme ci-devant dans une natte, & le marquai du No. 9. Au bout de 7 ſemaines je trouvai le chanvre comme dans la 10e expérience: la moiſiſſure n'étoit gueres plus ſenſible, quoiqu'il y eùt plus d'eau. Je le rempaquetai auſſi.

Il eſt vrai que dans de grands tas de chanvre ou de lin les effets pourroient bien être différents de ce qu'ils ſont dans ces ſortes de petits eſſais. Cependant ces expériences en petit devroient au moins, ſi l'on attrapoit une fois le vrai point, manifeſter quelque chaleur ou quelque autre phénomene, qui montreroit la route qu'on auroit à ſuivre pour réuſſir en grand, ou pour approcher de la réuſite. Le tems humide qu'il fit pendant pluſieurs ſemaines conſécutives étoit ſans doute un obſtacle conſidérable, mais pourtant pas aſſés grand pour empêcher ſeul tout ſuccès. L'expérience de l'Amirauté où il y a eu inflammation dans un mélange de ſuie, de chanvre & d'huile, n'eſt point déciſive pour le chanvre, vu que la ſuile & l'huile ſans chanvre s'enflamment enſemble.

L'expérience journaliere nous montre que le lin, le chanvre & les étoupes ne s'échauſent & ne s'enflamment pas par eux-mêmes quand on les a fait entrer avec violence dans les interſtices du bois, ſoit aux fenêtres, ſoit aux poutres ou troncs d'arbres des cabanes, & qu'ils ſont expoſés ainſi à une viciſſitude continuelle de ſéchereſſe & d'humidité. Le calfatage des vaiſſeaux & les cordages poiſſés dont on ſe ſert dans la marine, prouvent auſſi

ſuffiſamment que le chanvre poiſſé ne s'échauſe & ne s'enflamme pas à l'air libre ſec ou humide. Il ne reſte donc qu'à ſavoir ce qui arrive au chanvre ou au lin, quand il eſt imbibé d'huile, & employé au calfatage. C'eſt à ce ſujet que je fis les expériences ſuivantes.

Douzieme expérience.

Je pris du chanvre, je l'arroſai d'huile de chénevis crue, employant ½ once d'huile pour chaque livre de chanvre, je laiſſai à l'huile le tems de pénétrer le chanvre: puis je le mis par couches entre les ſurfaces de 4 planches neuves de bois de ſapin, paſſablement fortes, longues de 2 piés & larges de 6 pouces. Les couches de chanvre étoient de l'épaiſſeur d'un doigt. Les planches qui alternoient avec le chanvre, & qui étoient par conſéquent paralleles avec les couches, furent clouées enſemble avec de longs clous de fer rivés, ce qui comprima le chanvre autant que poſſible: j'avois fait rogner un peu les bords angulaires des planches, afin qu'elles formaſſent des crevaſſes élargies en dehors. Je fis entrer dans ces crevaſſes à coups de repouſſoir & de marteau autant de chanvre huilé qu'elles en purent contenir. Ce faiſceau de planches ſi bien calfaté, & marqué No. 1, repoſa d'abord deux ſemaines dans le laboratoire, puis deux autres ſemaines à l'air libre. Il ne s'y fit pas le moindre changement.

Treizieme expérience.

Je fis un autre faiſceau de planches exactement ſemblable au précédent, également rempli de couches de chanvre,

chanvre, cloué & calfaté; à l'exception que j'employai 1½ once d'huile ſur la livre de chanvre. Le chanvre dont j'eus beſoin cette fois-ci peſoit environ 1½ ℔. Ce faiſceau, marqué No. 2, fut poſé à côté du précédent & ſoigneuſement obſervé; mais je n'y remarquai aucun phénomene.

Quatorzieme expérience.

Un autre faiſceau encore, auſſi composé de 4 planches juxtapoſées, fut rempli de chanvre qui depuis pluſieurs jours avoit été imbibé de 3 onces d'huile par livre: il fut cloué & calfaté comme les précédents, marqué No. 3, & mis avec les autres. Je n'y remarquai rien non plus.

HISTO-

HISTOIRE NATURELLE.

I.

Deſcription de l'organe de génération du Rhinoceros à deux cornes.

Mr. le Docteur *Sparrmann*, connu par les obſervations botaniques & zoologiques qu'il a faites pendant pluſieurs années au Cap de Bonne-eſpérance, a communiqué à l'Académie le deſſin de l'organe de génération du Rhinoceros à deux cornes, qui eſt l'eſpèce ordinaire au Cap., & que les obſervations les plus modernes ont déja fait entrevoir comme très différente du Rhinoceros de l'Inde. La forme très caractériſée de cet organe, par lequel le Rhinoceros à deux cornes ſe rapproche en quelque façon du cheval, reſſemble ſi peu à la figure que Mr. le Docteur *Paſſons* a donnée de cette même partie du Rhinoceros à une corne, qu'on peut alléguer ce caractère comme une nouvelle preuve de la différence ſpécifique de ces deux animaux.

Planche I. La Planche Ire repréſente un membre du Rhinoceros à deux cornes, en grandeur naturelle: les lettres

a a indiquent le bord coupé du prépuce retiré.

b b le frein du prépuce.

c c le corps du membre.

d d

d d deux élévations charnues ou caroncules longitudinales au deſſus de ſa baſe.

e e un rebord charnu, qui couronne le gland & s'avance au bas en demi-cercle.

f f le gland ovale & tronqué, ceint d'un bord preſque en forme de champignon.

La proportion de ce membre eſt aſſés petite pour un animal, qui a onze pieds de longueur ſur ſept de hauteur & une circonference de 12 pieds: toute ſa longueur n'étoit que de 7 pouces, la circonference à la baſe 6, le grand diamètre du gland 1 p. 4 lignes, le petit diamètre 1 pouce: la hauteur des caroncules paraboliques d'environ 1 p. 6 l. leur etendue en longueur 2 p l'épaiſſeur 3 l.

Dans un Rhinoceros plus avancé en age, dont la longueur excedoit de quelques pieds les meſures données, & qui avoit les cornes bien plus grandes, cette partie ne s'eſt gueres trouvée de la moitie plus grande que dans le premier. Mr. *Sparrmann* conclut de ces proportions, que l'accouplement du Rhinoceros ne ſauroit avoir lieu de la maniere conjecturee par Mr. le Comte de *Buffon.*

II.

Extraits des Rapports envoyés à l'Académie par M. le Translateur *Jährig.*

1. Teinture en jaune des Calmoucs.

Une eſpéce de *Lichen*, qui couvre en certains en-

droits la ſurface des deſerts les plus arides vers la mer Caſpienne & qui ſemble être le même que *Dillenius* a decrit ſous le nom de *Lichenoides ceratophyllum obtuſius & minus ramoſum* (Hiſtor. muſcor. p. 154. tab. 20 fig. 49) promet une bonne teinture d'un jaune tirant ſur le ſouci. Le Translateur *Jähbrig* l'a vu employer par les Calmoucs pour teindre leurs étoffes de cotton, avec une addition d'alun & d'ecorce de pommier ſauvage. Les garçons Calmoucs le mâchent & en enveloppent les aſtragales d'animaux, qui ſervent à leurs jeux, & ces os, après avoir repoſé pendant une nuit, ſe pénètrent d'une belle couleur jaune, que la pâte du Lichen leur communique. Ce même Lichen mâché ſert encore d'un bon cataplaſme vulnéraire au peuple Calmouc.

2. Remede des Calmoucs contre les maladies de la peau.

L'Ariſtoloche (Ariſtol. Clematiles) au rapport du même voyageur, eſt employée par les Calmoucs en décoction, comme un remede externe contre les maladies de la peau. Ils en lavent auſſi leurs faucons de chaſſe, lorſqu'au printemps ils ſe trouvent attaqués de la galle & qu'ils portent mal leurs plumes. Le bain de cette décoction de l'herbe ſeche, dont on fait proviſion pour cet effet, fait promptement tomber leur vieilles plumes & favoriſe le cru des nouvelles.

3. Des Rats d'eau.

Ces animaux, d'après les obſervations de Mr. *Jähbrig* ſe multiplient très fort ſur les îles du Volga, ſurtout pendant l'inon-

l'inondation de ce fleuve qui dure fort avant dans l'été: ils ſe tranſportent auſſitôt que l'eau du fleuve eſt rentrée dans ſon lit, par une eſpece de migration, ſur les prairies qui le bordent, marchant de tous côtés par grandes troupes & s'écartant aux approches de l'hyver fort avant dans les déſerts élevés, où ils deviennent fort importuns par les degats qu'ils font à l'economie des Calmoucs: ceux-ci s'en vengent de leur côte en employant les peaux de ces animaux pour des fourrures.

4. Remede des Calmoucs contre des tumeurs gangreneuſes.

Ces tumeurs gangreneuſes attaquent les chevaux, le bétail & même les hommes dans les baſſes-terres le long du Volga par une cauſe juſqu'a préſent inconnue. Les Calmoucs recommandent contre ce mal, comme un remede très efficace une eſpece de *Statice* qu'ils appellent *Tuſchut.* Ils découpent cette plante un peu aſtringente, & en nourriſſent les chevaux attaques ſans leur permettre d'autre aliment.

5. Remede de ces mêmes Nomades pour exciter le ſaignement de nez.

Ils employent pour ſe procurer ce bénéfice, ſouvent très ſalutaire dans les maux des yeux & les engorgemens du cerveau, d'une eſpece de *Gramen*, décrite ſous le nom *d'Agroſtis pungens*, dans l'ouvrage de Mr. *Schreber* ſur les Graminées, & dont les Arabes ſe ſervent pour ſcarifier les hémorrhoïdaires. Les Calmoucs font des pelottes de cette plante, dont les feuilles viennent naturellement par

petites touffes: ils les introduiſent dans les narines & les agitent en différens ſens, jusqu'à ce que l'effet déſiré s'enſuive.

6. De la plante appellée *Prénanthes chondrilloïdes*.

Cette plante vient communement dans les ſables le long du Volga: elle produit autour de ſa racine une eſpece de Gomme-réſine fort tenace, qui n'eſt que le ſuc laiteux de cette plante inſpiſſé dans les ſables. Les Calmoucs le recueillent & aiment à le mâcher, ce qui le change en colle extremement tenace & élaſtique, ſemblable en quelque façon à la réſine élaſtique du Bréſil.

III.

Analyſe chymique d'une eſpèce de Gomme-réſine qui ſe produit autour de la racine du Prenanthes chondrilloïdes.

par Mr. *Géorgi*.

Cette réſine que Mr. *Jäbrig* a envoyée du déſert des Calmoucs, eſt gluante & d'un noir tirant ſur le verd, tant qu'elle eſt fraiche. Longtems expoſée à l'air durant l'eté, elle devient un peu plus tenace & plus noire: elle ne perd que peu de ſa maſſe en ſe deſſechant. Le papier dans lequel on la garde en eſt imbibé comme d'une huile graſſe, & cette graiſſe ſe montre auſſi dans d'autres expériences.

Quand

Quand on mâche cette réſine, elle cauſe une grande affluence de ſalive, mais la ſalive n'en change ni de couleur ni de gout, & n'en devient pas meme plus glaireuſe qu'elle n'etoit. Dix grains de réſine ayant été mâchés fortement pendant une heure, avoient à peine perdu un grain de leur poids: elle en devint plus noire, un peu plus gluante & plus extenſible, ſans ſouffrir aucun autre changement.

Elle s'allume aiſément à la flamme d'une chandelle, & produit elle meme une flamme jaunatre, qui donne une ſuie noire & legere en grande quantité. Quand on en allume un morceau en forme de cone & qu'on le laiſſe bruler ſur du papier blanc, ce papier s'imbibe tout à l'entour d'une graiſſe ſemblable à l'huile. Si on éteint la reſine avant qu'elle ait achevé de brûler, on peut l'étendre comme de la cire à cacheter, mais elle eſt trop gluante & trop viſqueuſe pour conſerver des empreintes. Si on la laiſſe brûler jusqu'à ce qu'elle s'éteigne d'elle meme, il reſte de 20 grains de reſine 8 grains d'un charbon noir & tenace qui ſe laiſſe encore paitrir un peu.

Vingt grains, ayant été digérés dans l'eau pendant pluſieurs jours & bouillis enſuite, perdirent à peine 2 grains, & les 18 qui reſtoient n'avoient ſubi aucun changement.

Vingt grains furent digérés pendant 24 heures dans l'Alkool, c'eſt à dire dans l'eſprit de vin le plus rectifié; après quoi la teinture ayant été décantée

on les fit digérer dans de nouvel Alkool, & de même pour la troiſieme fois. Il ſe trouva que l'eſprit avoit contracté une couleur jaunâtre, & après l'évaporation il reſta 13 grains d'une réſine jaune fort tenace. Ce reſte ſe laiſſoit encore un peu paitrir. Une mixtion d'Alkool de vin & d'une quantité égale d'eſprit de nitre en réſolut encore 2 grains par digeſtion. Le demeurant fut jaune, terreux & après la dulcification ſans goût, peſant 7 grains. Il s'alluma encore à la chandelle & ſe changea par là en un charbon noir.

Du vinaigre concentré put à peine par une longue digeſtion, de 20 grains en réſoudre un, & le reſte demeura ſans changement. De la Naphte de Vitriol (mais qui étoit déja vielle) de 20 grains en réſolut 8, qui formoient une réſine jaune fort tenace.

L'huile de Térébentine, de 20 grains en réſolut 16 par digeſtion: le demeurant étoit terreux & fort meuble ou léger.

Cette réſine ſe réſout dans l'huile d'amande par une longue digeſtion; mais à peu près la moitié de ſon poids demeure comme une fange noirâtre & indiſſoluble. L'huile en devient un peu plus jaune & n'a que très peu d'âpreté au goût.

Une dragme ou 60 grains ayant été mis dans un petit creuſet, ſe fondirent aiſément à une chaleur foible, en jettant une forte écume & une fumée épaiſſe qui avoit quelque choſe de douçâtre: la matiere fondue formoit

moit autour d'elle-même un bord de graiſſe. Le réſidu fut un charbon noir & tenace, lequel étant calciné plus fortement fuma encore & s'alluma. Après un feu plus violent, il reſta 13 grains d'une cendre jaunâtre & terreuſe, qui, dulcifiée par l'eau donna deux grains de ſel Alkali. Du demeurant, que les acides faiſoient encore fermenter, on tira 3 grains de terre calcaire moyennant l'alcide de Salpetre. Le reſte bien dulcifié perdit par la digeſtion avec de l'Acide de Vitriol 1½ grain apparemment de terre alumineuſe. Et le dernier reſte ne fut qu'un ſable de caillou très fin.

Ces expériences ayant été faites, il ne reſta plus aſſés de reſine pour en faire d'autres par la diſtillation. Cependant le detail que nous venons d'expoſer montre que cette ſubſtance eſt du nombre de celles qui, de cette nature, ne ſe trouvent que dans peu de plantes; que cette maſſe réſineuſe, outre l'huile eſſentielle qu'on trouve communement dans toutes les reſines, renferme de plus une huile graſſe & particuliere; & qu'il entre dans ſa texture une partie conſidérable d'une terre fine qui mêlée intimément au reſte de la compoſition, fait que le tout réſiſte ſi opiniatrément à toute diſſolution. Cette reſine ſe montre en pluſieurs points ſemblable à la fameuſe *réſine elaſtique* de l'Amérique; cependant la nôtre ne poſſede qu'en un degré fort inferieur les qualités les plus remarquables de celle-là qui conſiſtent dans une tenacité & une élaſticité extraordinaires.

MÉTÉ-

MÉTÉOROLOGIE.

Hyver de 1778 à 1779.

Les jours ſont marqués ſuivant le nouveau ſtile.

I.

Il neigea pour la premiere fois le 10 Octobre 1778 & pour la derniere fois le 24 Avril 1779. L'intervalle entre ces des deux termes eſt de 196 jours.

2. Il géla pour la premiere fois le 11 Octobre, Therm. de Delisle $151^{d.}$, & pour la derniere fois le 19 Avril, Term. $154^{d.}$. Cet intervalle entre la premiere & la derniere gélée eſt de 190 jours.

3. La Néva fut priſe pendant 135 jours; depuis le 13 Novembre où elle ſe géla en grande partie par un froid de $162^{d.}$; juſqu'au 11 Avril, où elle debacla par une température de $145^{d.}$. Les Glaçons du Ladoga ne parurent pas ce printemps: ils furent tous pouſſés par le vent ſur les côtes du Lac.

4. Depuis le 11 Octobre juſqu'au 19 Avril ſuivant, le plus grand froid obſervé, a été de $201^{d.}$ le 21 Janvier matin: Barom. 28, 55, c'eſt à dire $28\frac{55}{100}$ pouces de

de Paris. Ciel entierement ſerein, Vent de Nord-Eſt. Le moidre froid à midi a été de $136^{d.}$ le 22 Mars: Barom. 27, 56, ciel couvert en grande partie, pluye & vent de l'Oueſt. La difference entre ces deux froids eſt de 65 degrés de Deliſle.

5. Le froid moyen au matin & au ſoir a été trouvé

depuis le 1er Novembre jusqu'au 1er Mai	161 degrés
depuis le 1er Octobre jusqu'au 1er Juin	157 ——

Le froid moyen à midi

depuis le 1er Novembre jusqu'au 1er Mai	153 degrés
depuis le 1er Octobre jusqu'au 1er Juin	149 ——

6. Le froid au matin & au ſoir a été depuis le 11 Octobre jusqu'au 19 Avril

1 jour au delà de $200^{d.}$ le 21 Janvier
3 jours entre 190 & 200, le 20. 22. 23 Janvier
9 jours entre 180 & 190, en Decembre, Janvier & Février (*)
26 jours entre 170 & 180, en Novembre, Decembre, Janvier, Février & Mars (**)
39 jours entre 160 & 170, en Novembre —— Avril

97

(*) Le 11. 18. Déc. le 7. 19 Janv. le 9. 11. 12. 14. 16. Février.

(**) Le 20. 26. 27 Nov. le 7. 10. 12. 13. 17. 24. 25 Déc. le 2. 3. 6. 10. 13. 15. 16. 17 Janv. le 2. 3. 7. 8. 13. 17 Fevr. le 4. 5. Mars.

97 jours entre 150 & 160, en Octobre —— Avril
16 jours entre 140 & 150, en Novembre, Février, Mars & Avril.

7. Le froid à midi dans ce même intervalle de temps, depuis le 11 Oct. jusqu'au 19 Avril, a été obſervé

6 jours moindre que $140^{d.}$ en Mars & Avril (*)
79 jours entre 150 & 140, en Octobre —— Avril (**)
64 jours entre 160 & 150, en Octobre —— Avril
32 jours entre 170 & 160, en Novembre —— Mars
6 jours entre 180 & 170, en Novembre —— Février
2 jours entre 190 & 180, le 22 Janvier & 12 Février
2 jours entre 200 & 190; le 20 & 21 Janvier

8. L'état du Barometre depuis le 1er Novembre 1778 jusqu'au 1er Mai 1779:

La plus grande élévation 28. 83 le 22 Janvier à 9 h. du ſoir (***)
La plus petite élévation 26. 93 le 29 Décembre à 8 h. du ſoir (****)

La

(*) Le 21. 22. 25. 27 Mars, le 12. 15 Avril.

(**) Le 11. 13 —— 26 Oct., le 1 —— 5. 24. 28. 29. 30 Nov., le 1. 2. 4. 14. 15. 19. 21. 28. 29 Dec., le 5. 31 Janv. le 5. 6. 15. 18 —— 28 Fevr., le 1. 6. 9 —— 14. 17 —— 20. 23. 24. 26. 28 Mars, le 1 —— 7. 9. 10. 11. 13. 14. 16. 19 Avril.

(***) Therm. 189. ciel ſerein, Vent de l'Eſt.

(****) Therm. 154, ciel nubileux, vent fort du Sud; enſuite neige.

La variation totale - - 2.00, ou deux pouces de Paris

Le milieu - - - 27.83

La hauteur moyenne - 27.91 c. à. d. 27 $\frac{91}{100}$ pouces de Paris

Le Barometre s'eſt trouvé 107 jours au deſſus de 27 $\frac{9}{10}$; 78 jours au deſſus de 28; & 62 jours au deſſus de 28 $\frac{1}{10}$ pouces de Paris.

9. Les vents forts pendant ce même intervalle de ſix mois depuis le 1er Nov. juſqu'au 1er Mai, ſoufflèrent:

6 jours du *Nord*: le 10. 24 Déc. 17. 18 Janv. 13 Févr. 6 Avril.

2 jours du N-E: le 16 Déc. 2 Janvier.

8 jours de *l'Eſt*: le 11-14, 25 Nov. 18 Déc. 16 Févr. 3 Mars.

8 jours du S-E: le 23. 28 Nov. 6. 7. 31 Déc. 16 Janv. 2 Mars, 9 Avril.

6 jours du *Sud*: le 2. 15 Nov. 29. 30 Déc. 17 Févr. 21 Avril.

8 jours du S-Ou: le 30 Nov. 28 Déc. 26. 28 Janv. 19 Févr. 5 Mars. 22. 28 Avril.

12 jours de *l'Oueſt*: le 22 Déc. 3. 10. 13. 30 Janv. 6. 9. 23. 26 Févr. 6 Mars, 11. 24 Avril.

19 jours du N-Ou: le 20. 21. 22 Nov. 11. 17. 23. 25 Déc. 9. 11 Janv. 7. 20 Févr. 10. 15. 29. 30 Mars, 4. 5. 13. 18 Avril.

10. Les vents très forts regnèrent

1 jour du S-E le 6 Janvier.

3 jours du *Sud*: le 8 Déc. 7. 23 Avril.
9 jours du *S-Ou*: le 24 Nov. 12. 19 Déc. 12. 27. 31 Janv. 18 Févr. 12. 16 Avril.
8 jours de *l'Oueſt*: le 20. 21. 27 Déc. 5. 15 Févr. 14. 28 Mars, 15 Avril.
2 jours du *N-Ou*: le 10 Févrièr & le 1 Mars.

11. Les autres variations de l'Atmosphere pendant ces ſix mois d'hyver Novembre —— Avril *incl.* ſont marquées dans la table ci-jointe

Atmoſphere.	1778. Nov.	Déc.	1779. Janv.	Févr.	Mars	Avril	Somme
jours entierement ſereins.	3	1	6	4	8	4	26
jours entierement couvert	20	15	13	6	8	7	69
Brouillards - - -	1.	3	5	3	4	1	17
Pluie médiocre - -	4.	4	0	2	3	13	26
Pluie copieuſe - -	0	0	0	0	0	2	2
Neige médiocre - -	11	13	13	7	7	9	60
Neige copieuſe - -	3	1	1	0	1	1	7
Grele - - - - -	0	0	0	0	2	2	4
Aurores boréales foibles	0	1	0	1	1	1	4
Aurores boréales reſplen.	1	3	1	6	4	5	20

La quantité de l'eau de pluïe & de neige tombée depuis le 12 Octobre jusqu'au 12 Avril a été trouvée de 5 pouces & $\frac{91}{100}$ de Paris.

PRO-

PROMOTION.

Mr. *Pierre Inohodſof*, Adjoint pour l'Aſtronomie fut reçu & proclamé dans l'Aſſemblée du 7 Janvier Académicien extraordinaire pour la même partie.

MORTS.

Jean Burmann, ancien Profeſſeur de Botanique & Directeur du Jardin médecinal à Amſterdam.

Reçu au nombre des Académiciens externes en 1776 le 29 Décembre dans l'Aſſemblée ſolemnelle, par la quelle l'Académie Impériale des Sciences célebra le cinquantieme anniverſaire de ſa fondation.

Décédé le $\frac{13}{24}$ Janvier 1779.

Grégoire Nicolaievitſch Teplof, Conſeiller-privé, Sénateur & Chevalier des Ordres de St. Alexandre Nevski & de Ste Anne, Honoraire de l'Académie depuis 1747.

Décédé le 30 Mars 1779.

Nous ne donnerons ici qu'une eſquiſſe légere de la vie académique de ce Miniſtre ami des ſciences &

 pro-

protecteur de ceux qui les cultivoient. Nous ne toucherons pas à ſes autres merites envers ſa patrie; ils ſont à jamais conſignés dans les faſtes de l'Etat.

Mr. *Teplof* a fait ſes premieres études au ſéminaire de l'Archéveque de Novogorod *Théophane Procopowitſch*, d'heureuſe memoire: il y obtint même une place d'Inſtituteur, & s'y diſtingua par une traduction latine des Satyres du Prince de Cantemir & par une Géographie de l'Empire de Ruſſie qu'il avoit compoſée. Ces deux ouvrages cependant ne furent point imprimés.

En 1740 Mr. *Teplof* fut employé à l'Académie des Sciences, d'abord en qualité de Translateur avec la charge de travailler au Catalogue du Cabinet d'Hiſtoire naturelle. Cela lui donna l'envie de s'appliquer à cette ſcience: il s'adonna ſurtout à la Botanique & eut pour Maître le célèbre Profeſſeur *Amman*.

Il y fit des progrès ſi rapides, que déja vers la fin de l'année 1741, l'Académie pour récompenſer ſon aſſiduité & encourager ſon zèle, le reçut au nombre des adjoints. Mais ſon vaſte génie ne ſe borna pas à une ſeule ſcience; en 1742 il donna des leçons de Philoſophie morale & fut également applaudi.

Enſuite Mr. *Teplof* fut choiſi & nommé pour accompagner en qualité de Gouverneur le jeune Comte *Kyrile Grégorevitſch Raſoumovski* dans les païs étrangers: honneur diſtingué qui marquoit le grand cas que l'Impératrice *Eliſabeth*, de glorieuſe memoire, faiſoit déja alors de ſes

ſes talens, & la confiance qu'elle avoit en ſa droiture. A ſon retour le Comte ſon éleve ayant été déclaré Préſident de l'Academie Impériale des Sciences, Mr. *Teplof* travailla au Reglement de ce corps & eut une grand part à ſon renouvellement. Depuis cette époque l'Académie le compta parmi ſes Honoraires.

Les Ouvrages que Mr. *Teplof* a donnés au jour ſont :

1. Знанїе касающееся до философїи во обще часть 1, 1751. *c. à. d.* Notice concernant la Philoſophie en general.

2. Наставленїе Сыну. Inſtruction à ſon fils.

3. Собранїе разныхъ пѣсенъ съ приложенїемъ тоновъ на три голоса. *c. à. d.* Recueil de diverſes chanſons avec la muſique à trois voix.

4. О Засѣвѣ разныхъ тобаковъ чужестранныхъ въ малой россїи *c. à. d.* Methode de planter diverſes eſpeces etrangères de Tabac dans la petite Ruſſie; ouvrage que Sa Majeſté l'Impératrice a reçu très favorablement & qu'Elle a fait publier & diſtribuer dans tout le pais, par une ordre particulier date du 11 Avril 1763.

OUVRA-

OUVRAGES, MACHINES ET INVENTIONS

présentées ou communiquées à l'Académie pendant le cours du premier ſémeſtre de l'Année 1779.

Dans l'Aſſemblée du Lundi, 7 Janvier, le Secrétaire de Conférences a préſenté un echantillon de la plante dont les Calmoucs ſe ſervent pour guérir les faucons de la roigne, & que Mr. le Translateur *Jährig* a envoyé à l'Académie avec un rapport daté de Yenatayefska le 3 Décembre dernier. Cette plante fut reconnue être *l'Ariſtoloche clematite.* Voyez ci-deſſus *Hiſtoire naturelle* pag. 66.

—— —— il a communiqué la lettre imprimée de Mr. *de Magelan* ſur le *Reſpirateur* ou *Inhaler* des Anglois, inſtrument qui doit ſervir à guérir la toux catarrale par la reſpiration des vapeurs de l'eau chaude.

—— —— enſuite un avis ſur une édition des ouvrages de muſique de feu *Jean-Jacques Rouſſeau* propoſée par ſouſcription

—— enfin

—— —— enfin une lettre de Mr. de *Murr*, Patricien de Nuremberg, qui promet de communiquer à l'Academie une découverte importante pour les aſtronomes. Voyez ci après.

Le 14 Janvier. Mr. le Prof. *Krafft* a remis un catalogue imprimé des manuſcripts & divers deſſins du célebre aſtronome de Nuremberg *George Chriſtoph Eimmart*, mort au commencement de ce ſiecle. Ce catalogue lui a été adreſſé par Mr. *de Murr* pour être préſenté à l'Académie.

Le 18 Janvier. Le Secrétaire a lu & remis un écrit de Mr. *Rottboel*, Profeſſeur de Botanique à Copenhaguen, qui envoie le catalogue des plantes du Jardin de l'Académie Danoiſe, & qui ſouhaite de recevoir en échange celui du Jardin botanique de St. Petersbourg. Il propoſe enſuite un commerce épiſtolaire entre Mrs. les Botaniſtes des deux Académies, & il offre un troc des plantes tant vivantes que ſéchées, dont l'Academie royale de Copenhaguen poſſède une collection très conſidérable, contre des plantes de Sibérie & des autres contrées du vaſte Empire de Ruſſie. L'Academie a accepté ces propoſitions avec remerciment, & elle a chargé Mr. le Prof. *Lepechin* d'envoyer à Mr. *Rottboel* le Catalogue qu'il demande, & de lier avec lui une correſpondance qui ne ſauroit qu'être très utile & agréable aux deux Académies.

Le 21 Janvier. Le Secrétaire a lu une lettre adreſſée à Meſſieurs les Académiciens par Mr. le Prof. *Rottboel* qui envoie de la part de l'Univerſité de Copenhaguen

le 1er volume des ſes mémoires imprimés en 4to ſous le tître *Acta litteraria Univerſitatis Haſnienſis ad annum* 1778.

Le 28 Janvier. S. E. Mr. le Directeur a préſenté de la part de Mr. le Comte de *Harrſch*, Chambellan de L. L. M. M. Impériales & Royales deux Exemplaires de ſon ouvrage intitulé:

Pyrotechnia ſublimis ſeculi primaevi vel Liber meteororum: 4to Viennae 1778.

Le 4 Février. Le Secrétaire a lu une lettre de Mr. *Wägener* de Moſcou, qui envoie un paquet cacheté, à l'adreſſe de l'Académie Impériale des Sciences, lequel contient des Expériences ſur les moyens de prolonger ſa vie & de jouïr juſqu'à ſa fin d'un parfaite ſanté. Comme l'Académie exiſtera toujours, elle a conſeillé à Mr. *Wägener* de revenir au bout d'un ſiecle lui préſenter ſa decouverte.

Le 18 Février. Mr. le Prof. *Lexell* a lu une lettre de Mr. *Meſſier*, Aſtronome de la Marine à Paris, qui communique ſes obſervations touchant la comète apparue le mois précedent.

—— —— Le S$^{r.}$ *Kouliben* Méchanicien de l'Académie a fait voir un miroir parabolique de ſa conſtruction, compoſé de pluſieurs petits miroirs plans, qui produit un grand effet, & par le moyen du quel on peut dans des Illuminations de réjouïſſance, répréſenter des *Chiffres* de telle

telle couleur que l'on voudra en interpoſant entre le miroir & la lampe qui eſt au foyer, des verres colorés. Sa Majeſté l'Impératrice a daigné applaudir à cette découverte & en gratifier l'artiſte.

Le 22 Février. Mr. le Prof. *Güldenſtädt* a remis de la part de Mr. *Hablitzl'*, correſpondant de l'Académie à Aſtrachan, une quantité de ſemences de la *Nymphaea Nelumbo*; & de la part de Mr. *Jährig* un pacquet de l'herbe nommée *Ephedra monoſtachya.*

Le Secrétaire a lu & communiqué une lettre circulaire de Mr. *Pahin de Champlain de la Blancherie*, qui envoie diverſes feuilles imprimées; le Proſpectus d'une *correſpondance générale ſur les ſciences & les arts*; la 1[ere] feuille des *nouvelles de la république des lettres & de arts* dédiées à l'Académie Royale des Sciences de Paris; & l'Extrait du *journal de mes voyages, ou les cauſes & les effets de la débauche & de la mauvaiſe éducation.* Mr. *de la Blancherie* invite Mrs. les Académiciens de contribuer à la perfection de ſon nouveau Journal, & de lui envoyer les notices & les extraits qu'ils ſouhaiteroient de rendre publics.

Le 1 Mars. Le Secrétaire a préſenté de la part de Mr. *Klügel*, Profeſſeur de Mathématiques à Helmſtädt *Analytiſche Dioptrik. Leipzig* 1778, 4°, ouvrage ſuivi d'une traduction allemande & enrichie de diverſes additions que le même auteur a faite de *l'Inſtruction détaillée*

pour porter les inſtrumens de Dioptrique au plus haut degré de perfection par Mr. Fuſs.

—— —— il a lu un extrait de lettre communiqué à l'Académie par S. E. Mr. le Prince *Dimitri de Gallitzin*, dans laquelle Mr. *Jean Power*, Docteur en Médecine à Poleswerth en Angleterre fait part à Mr. *Needham* de deux guériſons remarquables de la Gangrène pratiquées par l'application de l'air fixe ou des cataplaſmes fermentans.

Le 8 Mars. Le Secrétaire a lu une lettre de Mr. le Prof. *Spielmann* de Strasbourg, qui communique diverſes nouvelles littéraires.

Le 15 Mars. Mr. le Prof. *Güldenſtädt*, a préſenté de la part de Mr. *Hablitzl* les obſervations météorologiques que ce correſpondant aſſidu a faites à Aſtrachan pendant le cours de l'année 1778.

Le Secrétaire a remis de la part de Mr. l'Aſſeſſeur *Engel*, les obſervations météorologiques qu'il a faites à Moſcou pendant les ſix dernieres années 1773 — 1778.

Le 8 Avril. S. E. Mr. *de Domaſchnef*, Directeur de l'Académie, a notifié la mort du Conſeiller-privé *Grégoire Nicolayevitſch Teplof*, Sénateur, Chevalier des Ordres de St. Alexandre Nevski & de Ste. Anne &c. Honoraire de l'Académie Impériale des Sciences: décédé le ſamedi 30 Mars. Voyez ci-deſſus pag. 77.

Le

Le Secrétaire a lu deux lettres de Mr. *de Magellan*, qui communique diverſes nouveautés littéraires & qui annonce avec éloge un Cours de Philoſophie expérimentale par Mr. *Atwoot* en 3 volumes in 4to, qu'on imprime par voye de ſouſcription.

Le 12 Avril. Le Secrétaire a préſenté de la part de Mr. le Conſeiller de Cour *Böckmann*, Profeſſeur de Mathématiques à Carlsruh.

Wünſche und Auſſichten zur Vervollkommung der Witterungslehre

brochure de 40 pages in 8vo, écrite avec beaucoup de chaleur & de zèle pour le progrès des connoiſſances météorologiques.

Le 19 Avril. Le Secrétaire a lu un Rapport de Mr. *Jährig*, daté de Yenatayefska, qui envoie une traduction allemande du *Dſchanga*, c'eſt à dire, de la Meſſe pour les trépaſſes que les pretres Calmoucs liſent à la ſuite des autres prieres pour la delivrance des Ames.

Le 29 Avril. Le Secrétaire a lu un Rapport de Mr. *Jährig*, qui envoie une traduction allemande de *l'Arſchanah Nomm*, ou Priere de ſacrifice bénit, qu'on fait en preparant la très ſainte offrande des Prêtres calmoucs nommée *Arſchäha*.

Le 3 Mai. Le Secrétaire a remis de la part de l'Univerſité Impériale de Moſcou les Diſcours que Mrs.

les Profeſſeurs *Schaden* & *Tſchepotaref*, ont prononcés à une Aſſemblée ſolemnelle tenue le 22 Avril à l'occaſion de l'Anniverſaire de la Naiſſance de *SA MAJESTÉ L'IMPERATRICE*: le premier en latin *De* CATHARINA *Magna*, *Legislatorum Prima omnium*, *Legislationem ſuam*, *ſapienti ac divino prorſus conſilio*, *conſcientiae*, *foro ei peculiari conſecrato*, *directe inaedificanti*: l'autre en ruſſe:

О способахъ и путяхъ, ведущихъ къ просвѣщенїю.

—— —— il a lu encore un rapport de Mr. le Tranſlateur *Jährig*, qui communique diverſes obſervations concernant les remedes uſités par les calmoucs: voyez ci-deſſus pag. 66.

Le 10 Mai. Le Secrétaire a remis une Quadrature de cercle, qui lui a été adreſſée par un anonyme, dont la lettre eſt ſans date: elle a été miſe au rebut.

Le 17 Mai. Mr. le Prof. *Laxmann*, a communiqué une lettre très intéreſſante de Mr. *Kalm*, Profeſſeur d'Hiſtoire naturelle à Abo. Ce célébre voyageur, après avoir mandé quelques nouvelles, aſſure que de tous les arbres qu'il avoit tirés de l'Amérique ſeptentrionale, le noyer blanc *Juglans alba*, le cériſier noir, *Prunus virginiana* & le Crataegus, *Crus Galli* viennent & proſpèrent parfaitement bien en plein air dans la Finlande. Les deux premiers ſe recommandent par leurs fruits, & le dernïer eſt très propre pour des hayes. Enſuite Mr. *Kalm* qui a auſſi voyagé en Ruſſie remarque que les mines de

fer

fer aux environs de Toula reſſemblent parfaitement à celles qu'il a vues en Virginie.

Mr. le Prof. *Güldenſtädt* a préſenté un journal que Mr. *Fries*, chirurgien, a tenu l'année paſſée à Samara, & qui contient diverſes obſervations ſur l'état & les variations de l'atmoſphère & ſur les glaces de la Wolga.

Le 24 Mai. Mr. le Prof. *Pallas*, a préſenté de la part de Mr. le Conſeiller d'État *Muller* de Copenhaguen, un mémoire manuſcrit : *De conſervis paluſtribus oculo nudo inviſibilibus.*

Le Secrétaire a remis le 1er volume de l'ouvrage intitulé

Engelbert Kämpfer, Geſchichte und Beſchreibung von Japan: herausgegeben von Hrn. Dohm.

Pour lequel l'Académie avoit ſouſcrit.

Mr. le Prof. *Lexell*, a préſenté de la part de l'Académie Royale des Sciences de Stockholm.

Kongl. Vetenskaps Academiens Handlingar foer Ar 1778. Vol. 39. quatre cahiers.

Danielis Melanderhjelm Fundamenta Aſtronomiae. Vol. I & II.

Torberni Bergmann Opuſcula Phyſica & Chemica.

Le 27 Mai. Mr. le Prof. *Pallas*, a communiqué la lettre de Mr. le Prof. *Burmann* à Amſterdam, qui notifie

tifie la mort de ſon pere *Jean Burmann*, ancien Profeſſeur de Botanique, & membre externe de l'Académie Impériale, décédé le $\frac{15}{24}$ Janvier. Voyez ci-deſſus pag. 77.

Le 3 Juin. Le Secrétaire a préſenté la troiſieme partie du II$^{d.}$ Tome de l'Hiſtoire & Mémoires de la Société formée à Amſterdam en faveur des Noyés, qu'elle a envoyée & adreſſée à l'Académie.

Le 14 Juin. Le Secrétaire a lu une lettre circulaire du Libraire *Pierre Fréderic Goſſe* de la Haye, qui envoie un Catalogue imprimé des livres qui ſeront vendus aux plus offrans, le 30 Août & jours ſuivans.

Le 21 Juin. Mr. le Prof. *Laxmann*, a préſenté & lu le projet d'un voyage phyſico-économique, qu'il va entreprendre encouragé par l'approbation de S. E. Mr. *de Domaſchnef.* Le Secrétaire a été chargé de dreſſer conformement à ce projet, un plan de voyage, qui enſuite ſera ſigné & expedié à Mr. *Laxmann.*

MATHE-

MATHEMATICA.

DE FORMATIONE
FRACTIONVM CONTINVARVM.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Principium vniuerſale ad fractiones continuas perducens reperitur in ſerie infinita quantitatum A, B, C etc.; quarum ternae ſibi ſuccedentes ſecundum certam legem, ſiue conſtantem ſiue vtcunque variabilem ita a ſe inuicem pendent, vt ſit

$$fA = gB + hC,\; f'B = g'C + h'D,\; f'C = g'' + D + h''E,$$
$$f'''D = g'''E + h'''F \text{ etc.}$$

Hinc enim deducuntur ſequentes aequalitates:

$$\frac{fA}{B} = g + \frac{hC}{B} = g + \frac{f'h}{f'B:C}$$
$$\frac{f'B}{C} = g' + \frac{h'D}{C} = g' + \frac{f''h'}{f''C:D}$$
$$\frac{f''C}{D} = g'' + \frac{h''E}{D} = g'' + \frac{f'''h''}{f'''D:E}$$
$$\frac{f'''D}{E} = g''' + \frac{h'''F}{E} = g''' + \frac{f''''h'''}{f''''E:F}$$

etc. etc.

Quod ſi iam poſteriores valores in prioribus continuo ſubſtituantur, ſponte emerget ſequens fractio continua:

$$\frac{fA}{B} = g + \cfrac{f^{I} h}{g^{I} + \cfrac{f^{II} h^{I}}{g^{II} + \cfrac{f^{III} h^{II}}{g^{III} + \cfrac{f^{IIII} h^{III}}{g^{IIII} + \text{etc.}}}}}$$

cuius ergo valor per ſolos duos primos terminos A & B ſeriei determinatur.

§. 2. Quoties igitur talis progreſſio quantitatum A, B, C, D, E etc. habetur, cuius lex ita fuerit comparata, vt terni quique eius termini ſibi ſuccedentes ſecundum legem quamcunque a ſe inuicem pendeant, toties inde deducitur fractio continua, cuius valor aſſignari poteſt. Quamobrem ſi formula quaecunque ita fuerit comparata, vt eius euolutio perducat ad huiusmodi ſeriem quantitatum A, B, C, D, E, etc. quarum quisque terminus per duos praecedentes determinatur, inde fractiones continuae deriuari poterunt, quod quomodo fiat, commodiſſime per aliquot exempla oſtendi poterit.

I. Euolutio formulae.

$$s = x^n (\alpha - \beta x - \gamma x x).$$

§. 8. In hac formula exponens n indefinitus ſpectatur, ſucceſſiue recipiens omnes valores 1, 2, 3, 4, 5, 6 etc., vnde, dummodo fuerit $n > 0$, haec formula euaneſcit, poſito $x = 0$, tum vero etiam euaneſcit, ſumto

$x = -$

$$x = -\frac{\beta \pm \sqrt{(\beta\beta + 4\alpha\gamma)}}{2\gamma}.$$

His notatis differentietur iſta formula, vt fiat

$$ds = n\alpha x^{n-1}dx - (n+1)\beta x^n dx - (n+2)\gamma x^{n+1}dx,$$

vnde per partes integrando et integrationem tantum indicando fiet

$$n\alpha\int x^{n-1}dx = (n+1)\beta\int x^n dx + (n+2)\gamma\int x^{n+1}dx + s.$$

Hinc, ſi poſt quamque integrationem, ita peractam, vt integrale euaneſcat poſito $x = 0$, ſtatuatur

$$x = -\frac{\beta \pm \sqrt{(\beta\beta + 4\alpha\gamma)}}{2\gamma},$$

quippe quo caſu fit $s = 0$, erit

$$n\alpha\int x^{n-1}dx = (n+1)\beta\int x^n dx + (n+2)\gamma\int x^{n+1}dx,$$

quae eſt eiusmodi relatio inter ternas formulas integrales ſibi ſuccedentes, qualem deſideramus pro formatione fractionis continuae; quandoquidem hae formulae integrales, ſi loco n ſucceſſiue ſcribantur numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6 etc. nobis ſuppeditant quantitates A, B, C, D etc.

§. 4. Scribamus igitur loco n ordine numeros naturales 1, 2, 3, 4, etc. vt prodeant iſtae relationes:

$$\alpha\int dx = 2\beta\int x\,dx + 3\gamma\int xx\,dx$$
$$2\alpha\int x\,dx = 3\beta\int xx\,dx + 4\gamma\int x^3 dx$$
$$3\alpha\int xx\,dx = 4\beta\int x^3 dx + 3\gamma\int x^4 dx$$
$$4\alpha\int x^3 dx = 5\beta\int x^4 dx + 6\gamma\int x^5 dx$$

etc. etc.

Hinc igitur habebimus

$$A = \int dx = x = -\frac{\beta + \sqrt{(\beta\beta + 4\alpha\gamma)}}{2\gamma},$$
$$B = \int x\,dx = \tfrac{1}{2}xx = \tfrac{1}{2}\left(\frac{-\beta + \sqrt{(\beta\beta + 4\alpha\gamma)}}{2\gamma}\right)^2,$$
$$C = \int xx\,dx = \tfrac{1}{3}x^3,\quad D = \int x^3 dx = \tfrac{1}{4}x^4$$

etc. etc.

Tunc

Tunc vero pro literis f, g, h habebuntur iſti valores:

$$f = \alpha,\ f' = 2\alpha,\ f'' = 3\alpha,\ f''' = 4\alpha \text{ etc.}$$
$$g = 2\beta,\ g' = 3\beta,\ g'' = 4\beta,\ g''' = 5\beta \text{ etc.}$$
$$h = 3\gamma,\ h' = 4\gamma,\ h'' = 5\gamma,\ h''' = 6\gamma \text{ etc.}$$

ex quibus valoribus reſultat ſequens fractio continua:

$$\frac{\alpha A}{B} = 2\beta + \cfrac{6\alpha\gamma}{3\beta + \cfrac{12\alpha\gamma}{4\beta + \cfrac{20\alpha\gamma}{5\beta + \cfrac{30\alpha\gamma}{6\beta + \text{etc.}}}}}$$

cuius ergo valor eſt

$$\frac{4\alpha\gamma}{-\beta + \sqrt{(\beta\beta + 4\alpha\gamma)}} = \beta + \sqrt{(\beta\beta + 4\alpha\gamma)}.$$

§. 5. Quo haec fractio continua concinnior reddatur, loco $\alpha\gamma$ ſcribamus $\frac{1}{2}\delta$, et prodibit

$$\beta + \sqrt{(\beta\beta + 2\delta)} = 2\beta + \cfrac{3\delta}{3\beta + \cfrac{6\delta}{4\beta + \cfrac{10\delta}{5\beta + \cfrac{15\delta}{6\beta + \text{etc.}}}}}$$

Quoniam autem haec expreſſio capite truncata videtur, adiecto hoc capite ponamus

$$s = \beta + \cfrac{\delta}{2\beta + \cfrac{3\delta}{3\beta + \cfrac{6\delta}{4\beta + \cfrac{10\delta}{5\beta + \text{etc.}}}}}$$ eritque

$s = \beta$

$$s = \beta + \frac{\delta}{\beta + \surd(\beta\beta + 2\delta)}$$

quae expreſſio reducitur ad hanc:

$$s = \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}\surd(\beta\beta + 2\delta).$$

§. 6. Haec autem fractio continua adhuc ad maiorem ſimplicitatem reduci poteſt, ſi loco δ ſcribamus 2ε, vt ſit

$$\tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}\surd(\beta\beta + 4\varepsilon) = \beta + \cfrac{2\varepsilon}{2\beta + \cfrac{6\varepsilon}{3\beta + \cfrac{12\varepsilon}{4\beta + \cfrac{20\varepsilon}{5\beta + 20 \text{ etc.}}}}}$$

Quod ſi iam prima fractio deprimatur per 2, ſecunda per 3, tertia per 4, quarta per 5 etc. prodibit ſequens forma:

$$\tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}\surd(\beta\beta + 4\varepsilon) = \beta + \cfrac{\varepsilon}{\beta + \cfrac{\varepsilon}{\beta + \cfrac{\varepsilon}{\beta + \cfrac{\varepsilon}{\beta + \text{ etc.}}}}}$$

quae eſt ſimpliciſſima, cuius ſumma ſi tanquam incognita ſpectetur, ac vocetur $= z$, erit vtique $z = \beta + \frac{\varepsilon}{z}$, ideoque $zz = \beta z + \varepsilon$, vnde fit $z = \frac{\beta + \surd(\beta\beta + 4\varepsilon)}{2}$, quae eſt eadem.

§. 7. Verum iſta ſumma ſimpliciſſima immediate deduci poteſt ex ipſa formula initio aſſumta

$$s = x^n(\alpha - \beta x - \gamma x x),$$

quam

quam quoniam nihilo aequalem poſuimus, erit vtique $\alpha = \beta x + \gamma x x$, eodemque modo

$$\alpha x = \beta x x + \gamma x^3, \ \alpha x x = \beta x^3 + \gamma x^4, \text{ etc.}$$

ita vt pro ſerie A, B, C, D, etc. habeamus hanc ſimplicem ſeriem poteſtatum: $1, x, x^2, x^3, x^4$ etc., tum vero omnes literae, f, g, h etc. fiunt α, β, γ etc. vnde oritur iſta fractio continua:

$$\frac{\alpha}{x} = \beta + \cfrac{\alpha\gamma}{\beta + \cfrac{\alpha\gamma}{\beta + \cfrac{\alpha\gamma}{\beta + \text{etc.}}}}$$

vbi eſt $\frac{1}{x} = \frac{\beta + \surd(\beta\beta + 4\alpha\gamma)}{2\alpha}$. Huius ergo fractionis valor eſt

$$\tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}\surd(\beta\beta + 4\alpha\gamma), \text{ vt ante, ob } \alpha\gamma = \varepsilon.$$

II. Euolutio formulae.

$$s = x^n (a - x).$$

§. 8. Haec igitur formula euaneſcit, ponendo $x = a$; hinc autem fit $d s = n a x^{n-1} d x - (n + 1) x^n d x$, quae expreſſio cum duobus tantum conſtet terminis, reducatur ad fractionem, cuius denominator ſit $\alpha + \beta x$, ita vt fiat

$$d s = \frac{n a \alpha x^{n-1} d x + (\beta n a - \alpha(n+1)) x^n d x - \beta(n+1) x^{n+1} d x}{\alpha + \beta x}$$

His igitur membris ſeorſim integratis fiet

$$s = n a \alpha \int \frac{x^{n-1} d x}{\alpha + \beta x} + (n \beta a - (n+1)\alpha) \int \frac{x^n d x}{\alpha + \beta x} - \beta(n+1) \int \frac{x^{n+1} d x}{\alpha + \beta x}$$

quae

quare ſi poſt ſingulas integrationes ſtatuamus $x = a$, vt fiat $s = 0$, habebimus hanc reductionem:

$$n a \alpha \int \frac{x^{n-1} dx}{\alpha + \beta x} = ((n+1)\alpha - n\beta a) \int \frac{x^n dx}{\alpha + \beta x} + (n+1)\beta \int \frac{x^{n+1} dx}{\alpha + \beta x}.$$

§. 9. Loco n ſubſtituamus nunc ſucceſſiue numeros 1, 2, 3, 4 etc. atque comparatione cum formulis generalibus inſtituta habebimus

$$A = \int \frac{dx}{\alpha + \beta x}, \; B = \int \frac{x\,dx}{\alpha + \beta x}, \; C = \int \frac{xx\,dx}{\alpha + \beta x} \text{ etc.}$$

vbi quidem poſt integrationem fieri debet $x = a$. Praeterea vero habebimus

$$f = a\alpha, \; f' = 2a\alpha, \; f'' 3a\alpha, \; f''' 4a\alpha, \text{ etc.}$$
$$g = 2\alpha - \beta a, \; g' = 3\alpha - 2\beta a, \; g'' = 4\alpha - 3\beta a, \text{ etc.}$$
$$h = 2\beta, \; h' = 3\beta, \; h'' = 4\beta, \; h''' = 5\beta, \text{ etc.}$$

atque ex his oritur ſequens fractio continua:

$$\frac{\alpha a A}{B} = (2\alpha - \beta a) + \cfrac{4 a \alpha \beta}{(3\alpha - 2\beta a) + \cfrac{9 a \alpha \beta}{(4\alpha - 3\beta a) + \cfrac{16 a \alpha \beta}{(5\alpha - 4\beta a) + \text{etc.}}}}$$

§. 10. Integratione autem inſtituta fit

$$\int \frac{dx}{\alpha + \beta x} = \frac{1}{\beta} l \frac{\alpha + \beta x}{\alpha},$$

quandoquidem integralia euaneſcere debent facto $x = 0$. Nunc igitur fiat $x = a$, eritque $A = \frac{1}{\beta} l \frac{\alpha + \beta a}{\alpha}$. Porro

$$\int \frac{x\,dx}{\alpha + \beta x} = \frac{1}{\beta}\left(x - \frac{\alpha}{\beta} l \frac{\alpha + \beta x}{\alpha}\right),$$ factoque $x = a$ fiet

$$B = \frac{a}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta\beta} l \frac{\alpha + \beta a}{\alpha},$$

quamobrem valor noſtrae fractionis continuae erit

$$\frac{\alpha a \beta l \frac{\alpha + \beta a}{\alpha}}{a\beta - \alpha l \frac{\alpha + \beta a}{\alpha}}$$

euidens autem eſt, nihil de vniuerſalitate perire, etiamſi ſumatur $a = 1$; tum enim erit

$$\frac{\alpha\beta l \frac{\alpha+\beta}{\alpha}}{\beta - \alpha l \frac{\alpha+\beta}{\alpha}} = (2\alpha - \beta) + \cfrac{4\alpha\beta}{(3\alpha - 2\beta) + \cfrac{9\alpha\beta}{(4\alpha - 3\beta) + \text{etc.}}}$$

§. 11. Tota autem haec expreſſio manifeſto vnice pendet a ratione numerorum α et β; vnde ſumamus $\alpha = 1$ et $\beta = n$, atque orietur haec fractio continua:

$$\frac{n l(1+n)}{n - l(1+n)} = (2-n) + \cfrac{4n}{(3-2n) + \cfrac{9n}{(4-3n) + \cfrac{16n}{(5-4n) + \text{etc.}}}}$$

cui ſi praefigamus ſecundum ordinis legem $1 + n$ et ſummam ſtatuamus $= s$, vt ſit

$$s = 1 + \cfrac{n}{(2-n) + \cfrac{4n}{(3-2n) + \cfrac{9n}{(4-3n) + \cfrac{16n}{(5-4n) + \text{etc.}}}}}$$

erit

$$s = \frac{1 + n(n - l(1+n))}{n l(1+n)} = \frac{1 + n - l(1+n)}{l(1+n)} = \frac{n}{l(1+n)}.$$

§. 12.

§. 12. Exempla aliquot percurramus, ſitque primo $n = 1$, erit

$$\frac{1}{l\,2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{9}{1 + \cfrac{16}{1 + \text{etc.}}}}}$$

Poſito autem $n = 2$ erit

$$\frac{2}{l\,3} = 1 + \cfrac{2}{0 + \cfrac{8}{-1 + \cfrac{18}{-2 + \cfrac{32}{-3 + \cfrac{50}{-4 + \text{etc.}}}}}}$$

quae autem expreſſio, ob quantitates negatiuas, non ſatis eſt commoda; quod cum eueniat quando $n > 1$, operae pretium erit eos caſus euoluere, quibus n vnitate minor accipitur.

§. 13. Quo hoc facilius fieri poſſit, reuertamur ad expreſſionem literas α et β continentes, atque capite, quod deerat ſuppleto, prodit iſta forma:

$$\frac{\beta}{l\,\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} = \alpha + \cfrac{\alpha\beta}{(2\alpha-\beta) + \cfrac{4\alpha\beta}{(3\alpha-2\beta) + \cfrac{9\alpha\beta}{(4\alpha-3\beta) + \text{etc.}}}}$$

Ponamus nunc $n = n - m$ et $\beta = 2m$, vt obtineamus ſe-

quentem formam:

$$\frac{2m}{l\frac{n+m}{n-m}} = n-m+\cfrac{2m(n-m)}{2n-4m+\cfrac{8m(n-m)}{3n-7m+\cfrac{18m(n-m)}{4n-10m+\text{etc.}}}}$$

vnde ſequentes caſus ſpeciales deducuntur.
Si $m=1$ et $n=3$ erit

$$\frac{2}{l\,2} = 2+\cfrac{4}{2+\cfrac{16}{2+\cfrac{36}{2+\cfrac{64}{2+\text{etc.}}}}}$$

quae fractio per 2 diuiſa et reducta praebet iſtam:

$$\frac{1}{l\,2} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{16}{1+\text{etc.}}}}}$$

quae iam ſupra eſt inuenta.
Sit $m=1$ et $n=4$ erit

$$\frac{2}{l\frac{5}{3}} = 3+\cfrac{6}{4+\cfrac{24}{5+\cfrac{54}{6+\cfrac{96}{7+\text{etc.}}}}}$$

$$= 3+\cfrac{6.1}{4+\cfrac{6.4}{5+\cfrac{6.9}{6+\cfrac{6.16}{7+\text{etc.}}}}}$$

Sit

Sit $m = 1$ et $n = 5$, erit

$$\frac{2}{l\frac{3}{2}} = 4 + \cfrac{8}{6 + \cfrac{32}{8 + \cfrac{72}{10 + \cfrac{128}{12 + \text{etc.}}}}}$$

ſiue

$$\frac{1}{l\frac{3}{2}} = 2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{8}{4 + \cfrac{18}{5 + \cfrac{32}{6 + \text{etc.}}}}}$$

$$= 2 + \cfrac{2.1}{3 + \cfrac{2.4}{4 + \cfrac{2.9}{5 + \cfrac{2.16}{6 + \text{etc.}}}}}$$

III. Euolutio formulae.

$$s = x^n(1 - x^2)$$

§. 14. Haec ergo formula euaneſcit caſibus $x = 0$ et $x = 1$. Quoniam vero hinc fit

$$ds = n x^{n-1} dx - (n+2) x^{n+1} dx,$$

reducatur hoc differentiale ad denominatorem $\alpha + \beta xx$, fietque

$$ds = \frac{n\alpha x^{n-1} dx + (n\beta - (n+2)\alpha) x^{n+1} dx - (n+2)\beta x^{n+3} dx.}{\alpha + \beta xx}$$

 Hinc

Hinc iam iterum integrando fit

$$s = n\alpha\int\frac{x^{n-1}dx}{\alpha+\beta xx} + (n\beta-(n+2)\alpha)\int\frac{x^{n+1}dx}{\alpha+\beta xx} - (n+2)\beta\int\frac{x^{n+3}dx.}{\alpha+\beta xx}$$

Quod ſi iam poſt integrationes ſtatuatur $x = 1$, prodibit haec integralium reductio:

$$n\alpha\int\frac{x^{n-1}dx}{\alpha+\beta xx} = ((n+2)\alpha - n\beta)\int\frac{x^{n+1}dx}{\alpha+\beta xx} + (n+2)\beta\int\frac{x^{n+3}dx}{\alpha+\beta xx}.$$

§. 15. Quoniam hic poteſtates ipſius x binario augentur, exponenti n ſucceſſiue tribuamus valores 1, 3, 5, 7, 9 etc. ac ſtatuatur:

$$A = \int\frac{dx}{\alpha+\beta xx},\ B = \int\frac{xx\,dx}{\alpha+\beta xx},\ C = \int\frac{x^4\,dx}{\alpha+\beta xx}\ \text{etc.}$$

Deinde vero literae f, g, h cum ſuis deriuatis erunt:

$$f = \alpha,\ f' = 3\alpha,\ f'' = 5\alpha,\ f''' = 7\alpha,\ \text{etc.}$$

$$g = 3\alpha-\beta,\ g' = 5\alpha-3\beta,\ g'' = 7\alpha-5\beta,\ \text{etc.}$$

$$h = 3\beta,\ h' = 5\beta,\ h'' = 7\beta,\ h''' = 9\beta,\ \text{etc.}$$

vnde naſcitur ſequens fractio continua:

$$\frac{\alpha A}{B} = 3\alpha-\beta+\cfrac{9\alpha\beta}{5\alpha-3\beta+\cfrac{25\alpha\beta}{7\alpha-5\beta+\cfrac{49\alpha\beta}{9\alpha-7\beta+\text{etc.}}}}$$

§. 16. Quia eſt $B = \int\frac{xx\,dx}{\alpha+\beta xx}$, erit

$B = \frac{1}{\beta}\int dx - \frac{\alpha}{\beta}\int\frac{dx}{\alpha+\beta xx}$, ideoque $B = \frac{1}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}A$,

quo valore ſubſtituto habebimus

$\alpha\beta A$

$$\frac{\alpha\beta A}{1-\alpha A} = 3\alpha - \beta + \cfrac{9\alpha\beta}{5\alpha - 3\beta + \cfrac{25\alpha\beta}{7\alpha - 5\beta + \text{etc.}}}$$

cui, quia caput deeſt, praefigamus $\alpha + \beta + \alpha\beta$; tum autem erit ſumma $\beta + \frac{1}{A}$, ita vt habeamus

$$\beta + \frac{1}{A} = \alpha + \beta + \cfrac{\alpha\beta}{3\alpha - \beta + \cfrac{9\alpha\beta}{5\alpha - 3\beta + \cfrac{25\alpha\beta}{7\alpha - 5\beta + \text{etc.}}}}$$

exiſtente $A = \int \frac{dx}{\alpha + \beta xx}$, integrali ita ſumto, vt euaneſcat poſito $x = 0$, tum vero facto $x = 1$.

§. 17. Euoluamus primo caſum ſimpliciſſimum, quo $\alpha = 1$ et $\beta = 1$, vbi erit $A = \frac{\pi}{4}$, vnde habebimus

$$1 + \frac{4}{\pi} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \text{etc.}}}}}$$

ſiue erit

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \text{etc.}}}}$$

quae eſt ipſa fractio continua olim a *Brounkero* primum producta, cuius inueſtigatio, cum a *Wallifio* per calculos valde taedioſos ſit eruta, hic quaſi ſponte ex noſtra formula ſeſe prodidit.

§. 18.

§. 18. Noſtra autem forma generalis infinitas alias ſimiles expreſſiones ſuppeditat, prouti literae α et β vario modo accipiuntur. Ac primo quidem, ſi α et β fuerint numeri poſitiui, valor literae A ſemper per arcum circularem exprimetur, contra vero per logarithmos. Sit igitur primo $\beta = 1$, eritque

$$A = \int \frac{dx}{\alpha + xx} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \text{ A tang. } \frac{x}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \text{ A tang. } \frac{1}{\sqrt{\alpha}},$$

vnde naſcitur haec fractio continua:

$$1 + \frac{\sqrt{\alpha}}{\text{A tang. } \frac{1}{\sqrt{\alpha}}} = \alpha + 1 + \cfrac{\alpha}{3\alpha - 1 + \cfrac{9\alpha}{5\alpha - 3 + \cfrac{25\alpha}{7\alpha - 5 + \text{etc.}}}}$$

Hinc igitur ſi ſumatur $\alpha = 3$, quia A tang. $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$, habebimus

$$1 + \frac{6\sqrt{3}}{\pi} = 4 + \cfrac{3}{8 + \cfrac{27}{12 + \cfrac{75}{16 + \cfrac{147}{20 + \text{etc.}}}}}$$

ſiue

$$1 + \frac{6\sqrt{3}}{\pi} = 4 + \cfrac{3 \cdot 1}{8 + \cfrac{3 \cdot 9}{12 + \cfrac{3 \cdot 25}{16 + \cfrac{3 \cdot 49}{20 + \text{etc.}}}}}$$

§. 19. Sit nunc B numerus poſitiuus quicunque, et quia eſt

$$A = \int \frac{dx}{\alpha + \beta x x} = \frac{1}{\beta} \int \frac{dx}{\frac{\alpha}{\beta} + x x},$$

integrando fit $A = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \text{A tang.} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. Hinc igitur habebimus

$$\beta + \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\text{A tang.} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}} = \alpha + \beta + \cfrac{\alpha\beta}{3\alpha - \beta + \cfrac{9\alpha\beta}{5\alpha - 3\beta + \text{etc.}}}$$

Faciamus igitur $\alpha + \beta = 2n$ et $\alpha - \beta = 2m$, vt ſit $\alpha = m + n$ et $\beta = n - m$, quibus valoribus poſitis erit

$$n - m + \frac{\sqrt{(nn - mm)}}{\text{A tang} \sqrt{\frac{n-m}{n+m}}} = 2n + \cfrac{nn - mm}{2n + 4m + \cfrac{9(nn - mm)}{2n + 8m + \text{etc.}}}$$

§. 20. Conſideremus etiam caſum, quo β eſt numerus negatiuus, et ponendo $\beta = -\gamma$, erit

$$A = \int \frac{dx}{\alpha - \gamma x x} = \frac{1}{\gamma} \int \frac{dx}{\frac{\alpha}{\gamma} - x x},$$

cuius integrale eſt

$$A = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\gamma}}\, l \frac{\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} + x}{\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} - x};$$

facto ergo $x = 1$ erit

$$A = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\gamma}}\, l \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\gamma}},$$

 vnde

vnde naſcitur iſta fractio continua:

$$-\gamma+\frac{2\sqrt{\alpha\gamma}}{l\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\gamma}}}=\alpha-\gamma-\cfrac{\alpha\gamma}{3\alpha+\gamma-\cfrac{9\alpha\gamma}{5\alpha+3\gamma-\cfrac{25\alpha\gamma}{7\alpha+5\gamma-\text{etc.}}}}$$

hocque modo nacti ſumus nouas fractiones continuas, quarum valores etiam per logarithmos exhibere licet, et quae prorſus diſcrepant ab illis, quas ante inuenimus.

§. 21. Hic caſus prae reliquis notatu dignus ſe offert, quando $\gamma=\alpha$. Siue, quod eodem redit, $\alpha=1$ et $\gamma=1$; quia enim tum eſt $l\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\gamma}}=l\infty=\infty$, habebimus

$$-1=0-\cfrac{1}{4-\cfrac{9}{8-\cfrac{25}{12-\text{etc.}}}}$$

ſiue mutatis ſignis

$$1=\cfrac{1}{4-\cfrac{9}{8-\cfrac{25}{12-\text{etc.}}}}$$

hinc primus denominator

$$4-\cfrac{9}{8-\cfrac{25}{12-\text{etc.}}}\quad\text{debet eſſe}=1.$$

Erit ergo $0=3-\cfrac{9}{8-\cfrac{25}{12-\text{etc.}}}$

ſiue

$$\text{ſiue } 1 = \cfrac{3}{8 - \cfrac{25}{12 - \text{etc.}}}$$

vbi denominator debet eſſe $= 3$, vnde fit

$$0 = 5 - \cfrac{25}{12 - \text{etc.}}$$

cuius denominator debet eſſe $= 5$, vnde fit

$$0 = 7 - \cfrac{49}{16 - \cfrac{81}{20 - \text{etc.}}}$$

ex quo ordine facile veritas perſpicitur.

§. 22. Sumamus $\alpha = 4$ et $\gamma = 1$ et nanciſcemur hanc fractionem:

$$-1 + \frac{4}{l\,3} = 3 - \cfrac{4.1}{13 - \cfrac{4.9}{23 - \cfrac{4.25}{33 - \cfrac{4.49}{43 - \text{etc.}}}}}$$

Sin autem accipiamus $\alpha = 9$ et $\gamma = 1$ erit

$$-1 + \frac{6}{l\,2} = 8 - \cfrac{9.1}{28 - \cfrac{9.9}{48 - \cfrac{9.25}{68 - \cfrac{9.49}{88 - \text{etc.}}}}}$$

IV. Euolutio formulae.

$$s = x^n e^{\alpha x} (1 - x)$$

§. 22. Hic e denotat numerum cuius logarithmus hyperbolicus eſt vnitas, ita vt $d. e^{\alpha x} = \alpha dx e^{\alpha x}$. Hinc ergo erit

$$ds = n x^{n-1} dx e^{\alpha x} + (\alpha - (n+1)) x^n dx e^{\alpha x} - \alpha x^{n+1} dx e^{\alpha x},$$

vnde viciſſim integrando fit

$$s = n \int x^{n-1} dx e^{\alpha x} + (\alpha - (n+1)) \int x^n dx e^{\alpha x} - \alpha \int x^{n+1} dx e^{\alpha x}.$$

Quod ſi ergo poſt integrationem ſtatuatur $x = 1$, erit

$$n \int x^{n-1} dx e^{\alpha x} = (n + 1 - \alpha) \int x^n dx e^{\alpha x} + \alpha \int x^{n+1} dx e^{\alpha x}.$$

§. 23. Quodſi iam loco n ſucceſſiue ſcribamus numeros 1, 2, 3, 4, ac faciamus

$$A \int e^{\alpha x} dx = \tfrac{1}{\alpha}(e^\alpha - 1) \text{ et } B = \int x dx e^{\alpha x} = \tfrac{\alpha - 1}{\alpha\alpha} e^\alpha + \tfrac{1}{\alpha\alpha}$$

$$f = 1,\ f' = 2,\ f'' = 3,\ f''' = 4, \text{ etc.}$$

$$g = 2 - \alpha,\ g' = 3 - \alpha,\ g'' = 4 - \alpha, \text{ etc.}$$

$$h = \alpha,\ h' = \alpha,\ h'' = \alpha,\ h''' = \alpha, \text{ etc.}$$

prodibit iſta fractio continua:

$$\frac{A}{B} = 2 - \alpha + \cfrac{2\alpha}{3 - \alpha + \cfrac{3\alpha}{4 - \alpha + \cfrac{4\alpha}{5 - \alpha + \text{etc.}}}}$$

Adiungamus adhuc ſuperne $1 - \alpha + \alpha$, erit eius valor

$$1 - \alpha + \frac{(\alpha - 1) e^\alpha + 1}{e^\alpha - 1} = \frac{\alpha}{e^\alpha - 1},$$

vnde

vnde habebitur haec fractio continua ſatis concinna:

$$\frac{\alpha}{e^{\alpha}-1}=1-\alpha+\cfrac{\alpha}{2-\alpha+\cfrac{2\alpha}{3-\alpha+\cfrac{3\alpha}{4-\alpha+\text{etc.}}}}$$

vnde patet, ſi fuerit $\alpha=0$, ob $e^{\alpha}-1=\alpha$, fore vtique $1=1$.

§. 24. Conſideremus nonnullos caſus ſpeciales; ac primo, ſi ſit $\alpha=1$, erit

$$\frac{1}{e-1}=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\text{etc.}}}}}$$

quae fractio facile transfunditur in hanc:

$$\frac{1}{e-1}=\cfrac{1}{1+\cfrac{\frac{1}{1}}{1+\cfrac{\frac{1}{2}}{1+\cfrac{\frac{1}{3}}{1+\cfrac{\frac{1}{4}}{1+\text{etc.}}}}}}$$

vnde fit

$$e-1=1+\cfrac{\frac{1}{1}}{1+\cfrac{\frac{1}{2}}{1+\cfrac{\frac{1}{3}}{1+\text{etc.}}}}$$

Haec autem porro a fractionibus partialibus liberata dat,

$$e - 1 = + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \text{etc.}}}}}}$$

vnde ſequitur

$$\frac{1}{e - 2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{4 + \text{etc.}}}}}$$

quae formae ob ſimplicitatem maxime ſunt notatu dignae. Ex penultima, qua fit

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \text{etc.}}}}}$$

ſumendo ſucceſſiue 1, 2, 3, pluraue membra, orientur ſequentes approximationes:

$$e = 2,0000$$
$$e = 3.0000$$
$$e = 2,6666$$
$$e = 2,7272$$
$$e = 2,7169$$

qui valores, alternatim maiores et minores, ſatis prompte ad veritatem conuergunt

§. 25.

§. 25. Sumamus $\alpha = 2$ erit

$$\frac{2}{ee-1} = -1 + \cfrac{2}{0 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{6}{2 + \cfrac{8}{3 + \text{etc.}}}}}$$

Ex hac fractione porro deducitur iſta:

$$\frac{2(ee-1)}{ee+1} = 0 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{6}{2 + \cfrac{8}{3 + \text{etc.}}}}$$

ſimilique modo, ſi pro α maiores numeri accipiantur, reductio fieri poterit.

§. 26. Poſſunt etiam pro α numeri negativi accipi. Ita ſi fuerit $\alpha = -1$ fiet

$$\frac{e}{e-1} = 2 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{2}{4 - \cfrac{3}{5 - \cfrac{4}{6 - \text{etc.}}}}}$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$\frac{e}{e-1} = 2 + \cfrac{1}{-3 + \cfrac{2}{4 + \cfrac{3}{-5 + \cfrac{4}{6 + \text{etc.}}}}}$$

ſimilique modo maiores valores expediri poſſunt.

§. 27.

§. 27. Statuamus etiam $\alpha = \frac{1}{2}$, ac reperietur iſta expreſſio:

$$\frac{1}{2(\sqrt{e}-1)} = \frac{1}{2} + \cfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2} + \cfrac{1}{\frac{5}{2} + \cfrac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{2} + \cfrac{\frac{5}{2}}{\frac{9}{2} + \text{etc.}}}}}$$

quae liberata a fractionibus partialibus euadit

$$\frac{1}{-1+\sqrt{e}} = 1 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{6}{7 + \cfrac{8}{9 + \text{etc.}}}}}$$

Simili modo ſi ſummus $\alpha = \frac{1}{3}$ erit

$$\frac{1}{3(\sqrt[3]{e}-1)} = 2:3 + \cfrac{1:3}{5:3 + \cfrac{2:3}{8:3 + \cfrac{3:3}{11:3 + \cfrac{4:3}{14:3 + \text{etc.}}}}}$$

quae a fractionibus partialibus liberata dat

$$\frac{1}{-1+\sqrt[3]{e}} = 2 + \cfrac{3}{5 + \cfrac{6}{8 + \cfrac{9}{11 + \cfrac{12}{14 + \text{etc.}}}}}$$

At

At ſi ponatur $\alpha = \frac{2}{3}$, prodit haec fractio continua:

$$\frac{2}{3(\sqrt[3]{(ee-1)})} = 1:3 + \cfrac{2:3}{4:3 + \cfrac{4:3}{7:3 + \cfrac{6:3}{10:3 + \cfrac{8:3}{13:3 + \text{etc.}}}}}$$

quae a fractionibus partialibus liberata fit

$$\frac{2}{\sqrt[3]{(ee-1)}} = 1 + \cfrac{6}{4 + \cfrac{12}{7 + \cfrac{18}{10 + \cfrac{24}{13 + \text{etc.}}}}}$$

§. 28. His formulis tanquam principalibus ac ſimplicioribus euolutis, ſimili modo alias multo generaliores tractare licebit, quae ad fractiones continuas multo magis abſconditas perducent, vti ex caſibus qui ſequuntur patebit.

V. Euolutio formulae.

$$s = x^n (a - b\,x^\theta - c\,x^{2\theta})^\lambda.$$

§. 29. Hinc igitur erit

$$ds = (a - b\,x^\theta - c\,x^{2\theta})^{\lambda-1} (n\,a\,x^{n-1}\,dx - b(n+\lambda\theta)x^{n+\theta-1}dx$$
$$- c(n+2\lambda\theta)\,x^{n+2\theta-1}\,dx),$$

vnde per partes integrando, tum vero ſtatuendo $a - b\,x^\theta - c\,x^{2\theta} = 0$, (quod fit ſi fuerit $x^\theta = -\frac{b + \sqrt{(bb + 4ac)}}{2c}$) habebitur iſta reductio generalis:

$$n a \int x^{n-1} dx (a - b x^{\theta} - c x^{2\theta})^{\lambda-1}$$
$$= (n + \lambda \theta) b \int x^{n+\theta-1} dx (a - b x^{\theta} - c x^{2\theta})^{\lambda-1}$$
$$+ (n + 2 \lambda \theta) c \int x^{n+2\theta-1} dx (a - b x^{\theta} - c x^{2\theta})^{\lambda-1}.$$

§. 30. Quodſi iam hanc formam cum noſtra generali initio tradita comparare velimus, valores pro litera n ſucceſſiue aſſumendi per differentiam θ augeri debent. Deinde non neceſſe eſt vt primus valor ipſius n, vt hactenus fecimus, ſumatur $= 1$; ſtatuamus igitur eius primum valorem $= \alpha$, et quaeramus valores binarum ſequentium formularum integralium, ſcilicet:

$$A = \int x^{\alpha-1} dx (a - b x^{\theta} - c x^{2\theta})^{\lambda-1} \text{ et}$$
$$B = \int x^{\alpha+\theta-1} dx (a - b x^{\theta} - c x^{2\theta})^{\lambda-1},$$

quae integralia ita ſunt capienda, vt euaneſcant poſito $x = 0$, quo facto ipſi x ille valor tribui debet, qui reddat formulam $a - b x^{\theta} - c x^{2\theta} = 0$. Quoniam autem hoc in genere exſequi non licet, iſtos valores per literas A et B indicare contenti ſimus, quos ergo tanquam cognitos ſpectemus.

§. 31. Praeterea vero literae f, g, h, cum ſuis deriuatis ſequentes induent valores:

$$f = \alpha a,\ f' = (\alpha + \theta) a,\ f'' = (\alpha + 2\theta) a,\ f''' = (\alpha + 3\theta) a, \text{ etc.}$$
$$g = (\alpha + \lambda\theta) b,\ g' = (\alpha + \theta + \lambda\theta) b,\ g'' = (\alpha + 2\theta + \lambda\theta) b, \text{ etc.}$$
$$h = (\alpha + 2\lambda\theta) c,\ h' = (\alpha + \theta + 2\lambda\theta) c,\ h'' = (\alpha + 2\theta + 2\lambda\theta) c, \text{ etc.}$$

Ex his igitur formabitur ſequens fractio continua:

$$\frac{\alpha a A}{B} = (\alpha+\lambda\theta)b + \cfrac{(\alpha+\theta)(\alpha+\lambda\theta)ac}{(\alpha+\theta+\lambda\theta)b + \cfrac{(\alpha+2\theta)(\alpha+\theta+2\lambda\theta)ac}{(\alpha+2\theta+\lambda\theta)b + \cfrac{(\alpha+3\theta)(\alpha+2\theta+2\lambda\theta)ac}{(\alpha+3\theta+\lambda\theta)b \text{ etc.}}}}$$

quae

quae forma vtique eſt maxime generalis, cuius autem vlteriori euolutioni non immoramur.

VI. Euolutio formulae.

$$s = x^n (1 - x^\theta)^\lambda$$

§. 32. Hinc ergo fit

$$ds = n x^{n-1} dx (1-x^\theta)^\lambda - \lambda \theta x^{n+\theta-1} dx (1-x^\theta)^{\lambda-1},$$

vnde tantum duae formulae integrales orirentur; quam obrem huic differentiali denominatorem arbitrarium tribuamus $a + b x^\theta$, vt habeamus:

$$ds = \frac{(1-x^\theta)^{\lambda-1}}{a+bx^\theta}(n a x^{n-1} dx - (a(n+\lambda\theta) - bn) x^{n+\theta-1} dx$$
$$- b(n+\lambda\theta) x^{n+2\theta-1} dx.$$

Nunc igitur, ponendo poſt integrationem $x = 1$, deducimus hanc reductionem:

$$na\int\frac{x^{n-1}dx(1-x^\theta)^{\lambda-1}}{a+bx^\theta} = (a(n+\lambda\theta) - bn)\int\frac{x^{n+\theta-1}dx(1-x^\theta)^{\lambda-1}}{a+bx^\theta}$$
$$+ b(n+\lambda\theta)\int\frac{x^{n+2\theta-1}dx(1-x^\theta)^{\lambda-1}}{a+bx^\theta}.$$

§. 33. Hic iterum euidens eſt valores ipſius n per differentiam θ creſcere debere. Statuatur autem primus valor ipſius $n = \alpha$, et quaerantur pro quouis caſu oblato binae ſequentes formulae integrales:

$$A = \int\frac{x^{\alpha-1}dx(1-x^\theta)^{\lambda-1}}{a+bx^\theta} \text{ et } B = \int\frac{x^{\alpha+\theta-1}dx(1-x^\theta)^{\lambda-1}}{a+bx^\theta},$$

vbi ſcilicet poſt integrationem poſitum ſit $x = 1$. Quibus

bus inuentis, cum hinc fiat

$$f = \alpha a,\ f' = (\alpha + \theta) a,\ f'' = (\alpha + 2\theta) a,\ f'' = (\alpha + 3\theta) a, \text{ etc.}$$

$$g = (\alpha + \lambda\theta) a - \alpha b,\ g' - (\alpha + \theta + \lambda\theta) a - (\alpha + \theta) b,$$

$$g'' = (\alpha + 2\theta + \lambda\theta) a - (\alpha + 2\theta) b, \text{ etc.}$$

$$h = (\alpha + \lambda\theta) b,\ h = (\alpha + \theta + \lambda\theta) b,\ h'' = (\alpha + \theta + 2\lambda\theta) b, \text{ etc.}$$

inde formabitur ſequens fractio continua:

$$\frac{\alpha a A}{B} = (\alpha + \lambda\theta) a - \alpha b + \cfrac{(\alpha+\theta)(\alpha+\lambda\theta) a b}{(\alpha+\theta+\lambda\theta) a - (\alpha+\theta) b + \cfrac{(\alpha+2\theta)(\alpha+\theta+\lambda\theta) a b}{(\alpha+2\theta+\lambda\theta) a - (\alpha+2\theta) b + (\alpha+3\theta)(\alpha+2\theta+\lambda\theta) a b \text{ etc.}}}$$

cuius formae vberiore euolutione ſuperſedemus.

VII. Euolutio formulae.

$$s = x^n (e^{\alpha x} (1 - x)^\lambda)$$

§. 34. Hinc ergo fit

$$ds = (1 - x)^{\lambda - 1} (n x^{n-1} dx - (n + \lambda - \alpha) x^n dx - \alpha x^n dx),$$

hinc igitur ſi poſt integrationem vbique ſtatuatur $x = 1$, quippe quo caſu fit $s = 0$, habebimus hanc reductionem:

$$n \int x^{n-1} dx\, e^{\alpha x} (1 - x)^{\lambda - 1} = (n + \lambda - \alpha) \int x^n dx\, e^{\alpha x} (1 - x)^{\lambda - 1}$$
$$+ \alpha \int x^{n+1} dx\, e^{\alpha x} (1 - x)^{\lambda - 1}.$$

§. 35. In his ergo formulis exponenti n valores vnitate creſcentes tribui debebunt, tum vero hic minimum eius valorem ſumamus $n = \delta$, atque valores literarum A et B ex his formulis erui oportebit, ponendo poſt integrationem $x = 1$,

$$A = \int x^{\delta - 1} dx\, e^{\alpha x} (1 - x)^{\lambda - 1},\ B = \int x^\delta dx\, e^{\alpha x} (1 - x)^{\lambda - 1}$$

deinde vero ob hos valores:

$$f = \delta,$$

$f = \delta,\ f' = \delta + 1,\ f'' = \delta + 2,\ f''' = \delta + 3,$ etc.
$g = \delta + \lambda - \alpha,\ g' = \delta + 1 + \lambda - \alpha,\ g'' = \delta + 2 + \lambda - \alpha,$ etc.
$h = \alpha,\ h' = \alpha,\ h'' = \alpha,$ etc.

ſequitur iſta fractio continua:

$$\frac{\delta A}{B} = \delta + \lambda - \alpha + \cfrac{(\delta + 1)\alpha}{\delta + 1 + \lambda - \alpha + \cfrac{(\delta + 2)\alpha}{\delta + 2 + \lambda - \alpha + \cfrac{(\delta + 3)\alpha}{\delta + 3 + \lambda - \alpha + \text{etc.}}}}$$

Vbi imprimis notari oportet, exponentes λ et δ neceſſario nihilo maiores accipi debere, quia alioquin formula principalis $x^{n} e^{\alpha x} (1 - x)^{\lambda}$ caſibus $x = 1$ non euaneſceret.

§. 36. Si literis δ et λ tribuatur valor $= 1$, prodibit caſus iam ſupra tractatus; ac ſi his literis numeri integri aſſignentur, eiusmodi fractiones continuae orientur, quas per certas operationes ad priores reducere licebit. Verum ſi his literis δ et λ, vel alterutri, vel vtrique, fractiones aſſignemus, tum formae orientur ad priores prorſus irreductibiles, quarumque valor haud aliter quam per quantitates maxime tranſcendentes exprimere liceat. Velvti ſi fuerit $\delta = \frac{1}{2}$ et $\lambda = \frac{1}{2}$, valor literae A quaeri debebit ex hac formula integrali: $A = \frac{e^{\alpha x}\, dx}{\sqrt{(x - xx)}}$, cuius integratio ad quantitates maxime tranſcendentes perducit, ita vt valor talium fractionum continuarum prodeat maxime abſtruſus.

DE TRIBVS NVMERIS QVADRATIS, QVORVM TAM SVMMA, QVAM SVMMA PRODVCTORVM EX BINIS SIT QVADRATVM.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

In Tomo nouorum Commentariorum VIII. tractaui Problema, quo tres numeri quaeruntur, quorum tam ſumma, quam ſumma productorum ex binis, vna cum producto omnium fiant quadrata, cuius Solutio cum non ſolum eſſet difficillima, ſed etiam ad immenſos numeros perduxiſſet, merito videri poterat, ſi inſuper noua conditio adderetur, ſolutionem vires Analyſeos penitus eſſe ſuperaturam. Hoc tamen euenit in quaeſtione, quam hic tractabo, vbi praeter tres conditiones memoratas etiam haec poſtulatur, vt ſinguli numeri quaeſiti ſint quadrati. Interim tamen hac conditione adiecta, poſt plures conatus irritos, tandem modum inueni iſtud Problema ſatis commode reſoluendi, vbi adeo numeros ſatis modicos aſſignare licet Problemati ſatisfacientes.

§. 2.

§. 2. Sint xx, yy, zz, terni numeri quadrati quaeſiti, ita vt eſſe debeat,

I. $xx + yy + zz = \square$.

II. $xxyy + xxzz + yyzz = \square$,

quarum conditionum priori ſatisfiet, ſumendo

$$x = pp + qq - rr;\ y = 2pr \text{ et } z = 2qr;$$

tum enim erit,

$$xx + yy + zz = (pp + qq + rr)^2,$$

vnde ſi ponamus $xx + yy + zz = P^2$, ſumtis

$x = pp + qq - rr$, $y = 2pr$, $z = 2qr$, fiet $P = pp + qq + rr$.

§. 3. Progrediamur nunc ad alteram conditionem, quae poſtulat, vt ſit

$$xx(yy + zz) + zzyy = Q^2;$$

quare cum ſit

$$yy + zz = 4rr(pp + qq),$$

hinc orietur iſta aequatio:

$$Q^2 = 4rr(pp + qq)(pp + qq - rr)^2 + 16ppqqr^4,$$

quae diuiſa per factorem quadratum $4rr$ dabit

$$\frac{QQ}{4rr} = (pp + qq)(pp + qq - rr)^2 + 4ppqqrr,$$

quam ergo formulam quadratum reddi oportet. Ea autem euoluta literae p et q ad ſextam poteſtatem aſcendent, litera vero r tantum ad quartam, quae ergo commode inueſtigari poſſe videtur, ſiquidem caſus ſponte patet, ſcilicet ſi $rr = pp + qq$, dummodo fuerit $pp + qq$ quadratum. Interim tamen hinc ne vnicam quidem aliam ſolutionem deriuare licet; vnde negotium prorſus alio modo aggredi

opor

oportet, quod ſequenti modo egregio ſucceſſu praeſtari poterit.

§. 4. Pono autem $r = p - nq$, ita vt hoc modo nulla reſtrictio inferatur, quoniam loco literae r noua indeterminata n introducitur; tum autem noſtra aequatio hanc induet formam:

$$\frac{QQ}{4(p-nq)^2} = (pp+qq)(2npq+(1-nn)qq)^2 - 4ppqq(p-nq)^2,$$

quae iam diuidi poteſt per qq, ita vt

$$\frac{QQ}{4qq(p-nq)^2} = (pp+qq)(2np+(1-nn)q)^2 + 4pp(p-nq)^2,$$

quod quadratum breuitatis gratia deſignemus per R^2, ita vt ſit $Q = 2q(p-nq)R$. Nunc igitur facta euolutione prodibit haec aequatio:

$$R^2 = 4(1+nn)p^4 - 4n(1+nn)p^3q + (1+6nn+n^4)ppqq \\ + 4n(1-nn)pq^3 + (1-nn)^2q^4,$$

in qua formula poſtremum membrum euaſit quadratum; primum vero membrum reddi poſſet quadratum, faciendo $nn+1 = \square$; at vero ad ſolutionem ſufficere poteſt, vt poſtremus tantum terminus ſit quadratum.

§. 5. Pro R^2 eiusmodi quadratum ſtatuamus, quo ſublato tres vltimi termini e medio tollantur, et ex duobus prioribus relictis ratio inter p et q determinetur. Hunc in finem ſtatuatur

$$R = (1-nn)qq + 2npq + \alpha pp,$$

et α ita determinetur, vt etiam antepenultimus auferatur, quod fit ſumendo $\alpha = \frac{1+2nn+n^4}{2(1-nn)}$, quo facto aequatio relicta erit:

4 p^4

$$4p^4 - 4np^3q = \frac{(1+nn)^3}{4(1-nn)^2}p^4 + \frac{2n(1+nn)}{1-nn}p^3q,$$

ſiue per $4(1-nn)^2$ multiplicando, per p^3 diuidendo et literas p et q ad eandem partem transferendo fiet,

$$(15 - 35nn + 13n^4 - n^6)p = 8n(1-nn)(3-nn)q,$$

quae aequatio porro per $3-nn$ diuidi poteſt, quo facto fit $(5-10nn+n^4)p = 8n(1-nn)q$, vnde deducitur

$$\frac{p}{q} = \frac{8n(1-nn)}{5-10nn+n^4}.$$

§. 6. Sumamus igitur, vt huic aequationi ſatisfiat, $q = 5 - 10nn + n^4$ et $p = 8n(1-nn)$, ex quibus valoribus colligitur

$$r = p - nq = n(3 + 2nn - n^4).$$

Praeterea vero his valoribus ſubſtitutis inuenimus

$$R = (1-nn)\left((5-10nn+n^4)^2 + 16nn(5-10nn+n^4) + 32(1+nn)^2\right).$$

Inuentis autem his valoribus ipſi numeri quaeſiti ita formabuntur, vt ſit

$$x = pp + qq - rr;\; y = 2pr;\; z = 2qr.$$

Ope harum formularum igitur aliquot exempla euoluamus.

Exemplum I.

§. 7. Sit $n = 2$, eritque $p = -48$; $q = -19$; $r = 10$, vnde fit $R = 7035$. Erat autem

$$Q = 2qrR = 4.\,5^2.\,19.\,1407.$$

Hinc vero ipſi numeri quaeſiti ita ſe habebunt:

$$x = 2565;\; y = 2.\,10.\,48;\; z = 2.\,10.\,19.$$

 Quoni-

Quoniam autem hi numeri communem diuiſorem habent 5, per eius diuiſionem deprimi poterunt, ſimulque numerus P quinquies euadet minor, at vero Q vicies quinquies minor, hocque modo ſolutio ſequentibus valoribus continebitur:

$$P = 553;\ Q = 106932;\ x = 513;\ y = 192;\ z = 76.$$

Quadrata iam numerorum x, y, z eiusmodi erunt numeri, qui Problemati olim tractato ſatisfacient. Tales igitur numeri erunt,

$$x^2 = 263169;\ y^2 = 36864;\ z^2 = 5776,$$

qui numeri ſunt incomparabiliter minores iis, quos loco citato exhibui; vnde intelligitur, methodum, qua tum temporis ſum vſus, non ſatis eſſe accommodatam. Summa autem horum trium numerorum eſt $= 553^2$; ſumma productorum ex binis $= 35948^2$ et productum omnium $= 513^2 . 192^2 . 76^2$.

Exemplum II.

§. 8. Sit $n = 3$, eritque

$$p = -8.24 = -192;\ q = -4;\ r = -180,$$

qui numeri per -4 depreſſi euadent

$$p = 48;\ q = 1;\ r = 45;\ \text{vnde fit}$$

$$R = 14120,\ \text{hincque}\ Q = 18.25.2824.$$

Hinc vero ipſi numeri quaeſiti erunt

$$x = 280;\ y = 90.48;\ z = 90,$$

ſiue deprimendo per 10 fiet

$$x = 28;\ y = 432;\ z = 9;\ P = 433;\ Q = 12708,$$

qui numeri adhuc praecedentibus ſunt minores, ideoque minimi

minimi omnium eſſe videntur qui ſatisfaciant. Quadrata ergo horum numerorum, quae ſunt

$$x^2 = 784;\ y^2 = 186624;\ z^2 = 81,$$

erunt ſine dubio minimi Problemati olim tractato ſatisfacientes, quippe quorum ſumma eſt 433^2; ſumma quadratorum ex binis $= 12708^2$ et productum omnium $28^2 \cdot 432^2 \cdot 9^2$.

Exemplum III.

§. 9. Sit $n = \frac{1}{2}$, fietque $p = 3$; $q = \frac{41}{16}$; $r = \frac{55}{32}$, ſiue, ductis his omnibus numeris in 32, fiet $p = 9$; $q = 82$; $r = 55$; vnde fit

$$R = 22515 \text{ et } Q = 2.\ 82.\ 55.\ 22515.$$

Tum vero erit

$$x = 12915;\ y = 2.\ 55.\ 96;\ z = 2.\ 55.\ 82,$$

qui numeri per 5 deprimi poſſunt, quo facto fit

$$x = 2583;\ y = 2112;\ z = 1804, \text{ ſiue}$$

$$x = 3.\ 7.\ 123;\ y = 3.\ 11.\ 64;\ z = 4.\ 11.\ 41,$$

§. 10. Haec omnia ex formulae biquadraticae §. 4. allatae prima reſolutione ſunt deducta. Conſtat autem methodus, qua ex qualibet reſolutione iam inuenta plures nouae deriuari poſſunt; verum hoc modo ad formulas nimis complicatas perueniretur, quod negotium hic non ſuſcipio: praecipue enim in talibus inueſtigationibus id ſolet intendi, vt ſolutiones ſaltem ſimpliciores eruantur.

Euolutio caſuum.

quibus eſt $nn + 1$ quadratum.

§. 11. Sit igitur $nn + 1 = mm$, quod euenit, quoties fuerit $n = \frac{aa - bb}{2ab}$; tum enim erit $m = \frac{aa + bb}{2ab}$, quo obſeruato retineamus in calculo literas m et n, eritque aequatio reſoluenda,

$$R^2 = 4mmp^4 - 4nmmp^3q + (m^4 + 4nn)ppqq + 4n(1 - nn)pq^3 + (1 - nn)^2 q^4,$$

vbi iam tam primus quam vltimus terminus ſunt quadrata, ideoque praeter operationem praecedentem tres adhuc reſpectu primi termini inſtitui poterunt, quas ergo ordine proſequemur.

§. 12. Primo igitur ponatur

Operat. I. $$R = 2mpp - nmpq + (1 - nn)qq$$

vbi notetur, numerum m tam poſitiue quam negatiue accipi poſſe, vnde ergo gemina ſolutio naſcetur. Huius ergo valoris pro R quadrato a ſuperiore expreſſione pro R^2 ſublato orietur ſequens aequatio:

$$\frac{p}{q} = \frac{4n + 2mn - 2mn^3 - 4n^3}{4m - 4mnn + mmnn - 4nn - m^4},$$

ſiue ob $nn = mm - 1$ erit

$$\frac{p}{q} = \frac{2n(4 + 2m - 2mm - m^3)}{4 + 8m - 5mm - 4m^3}.$$

§. 13. Quoniam literae m et n ſemper ſunt fractiones, quo eae facilius tollantur, introducamus multiplicatorem indefinitum Δ ponamusque

$$p = 2\Delta n(4 + 2m - 2mm - m^3) \text{ et}$$
$$q = \Delta(4 + 8m - 5mm - 4m^3),$$

vnde

vnde ob $r = p - nq$ fiet

$$r = \Delta n (4 - 4m + mm + 2m^3).$$

§. 14. His igitur tribus valoribus inuentis numeri quaeſiti x, y, z ita ex iis determinantur, vt ſit

$$x = pp + qq - rr;\ y = 2pr;\ z = 2qr.$$

Praeterea vero erit

$$P = pp - qq + rr;\ Q = 2qrR,$$

exiſtente

$$R = 2mpp - mnpq + (1 - nn)qq.$$

§. 15. Vnicum exemplum euoluamus, vt pateat, num hinc minores numeri ſint prodituri quam ante. Sumamus igitur $a = 2$ et $b = 1$, fietque

$n = \frac{3}{4}$ et $m = \pm \frac{5}{4}$, hincque fiet

$$p = \tfrac{3}{2}\Delta(4 \pm \tfrac{5}{2} - \tfrac{25}{8} \mp \tfrac{125}{64}),\ q = \Delta(4 \pm 10 - \tfrac{125}{16} \mp \tfrac{125}{16})$$

ſiue

$$p = \tfrac{3}{2}\Delta(\tfrac{7}{8} \pm \tfrac{35}{64}) \text{ et } q = \Delta(-\tfrac{61}{16} \pm \tfrac{35}{16}).$$

Sumamus $\Delta = 128$, fietque

$$p = 3(56 \pm 35)\ q = 8(-61 \pm 35),$$

hincque

$$r = p - \tfrac{3}{4}q = 3(178 \mp 35.$$

Valeat ſignum ſuperius, quoniam hoc caſu numeri reſultantes per 13 deprimi poſſunt, quo facto reperitur:

$$p = 3 \cdot 7 = 21;\ q = -2 \cdot 8 = -16;\ r = 3 \cdot 11 = 33,$$

vnde colligimus:

$$x = -392;\ y = 1386;\ z = -1056,$$

 qui

qui denuo, reiectis ſignis, per 2 deprimuntur, ita vt

$$x = 196;\ y = 693;\ z = 528.$$

Supra autem iam multo minores numeros nacti ſumus.

Operat. II. §. 16. Vt praeter primum terminum etiam duo vltimi tollantur ſtatuamus:

$$R = 2\,m\,p\,p + 2\,n\,p\,q + (1 - n\,n)\,q\,q;$$

vnde orietur ſequens aequatio:

$$\frac{p}{q} = \frac{4\,m - 4\,m\,n\,n - m^4}{4\,m\,n\,(2 + m)},\ \text{ſiue}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{8 - 4\,m\,m - m^3}{4\,n\,(2 + m)}\ (\text{ob}\ n\,n = m\,m - 1),$$

ſiue etiam

$$\frac{p}{q} = \frac{(2 + m)\,(4 - 2\,m - m\,m)}{4\,n\,(2 + m)} = \frac{4 - 2\,m - m\,m}{4\,n}.$$

Fiat vt ſupra

$$p = \Delta\,(4 - 2\,m - m\,m)\ \text{et}\ q = 4\,\Delta\,n,$$

hincque erit

$$r = p - n\,q = \Delta\,(8 - 2\,m - 5\,m\,m);$$

denique

$$x = p\,p + q\,q - r\,r;\ y = 2\,p\,r;\ z = 2\,q\,r;$$

$$P = p\,p + q\,q + r\,r\ \text{et}\ Q = 2\,q\,r\,R,$$

exiſtente

$$R = 2\,m\,p\,p + 2\,n\,p\,q + (1 - n\,n)\,q\,q.$$

§ 17. Sumamus iterum, quo res exemplo illuſtretur, $n = \frac{3}{4}$, ideoque $m = \pm \frac{5}{4}$, fietque,

$$p = \Delta\,(\tfrac{39}{16} \mp \tfrac{5}{2})\ \text{et}\ q = 3\,\Delta.$$

Sumatur $\Delta = 16$, et ſigno ſuperiore valente erit $p = -1$ et

et $q = 48$; hinc ſit $r = -37$, vnde numeri quaeſiti prodeunt

$$x = 936;\ y = 74;\ z = 3552,$$

ſiue deprimendo

$$x = 468;\ y = 37;\ z = 1776,$$

qui praecedentibus adhuc maiores ſunt.

§. 18. Tollamus nunc tres terminos priores, po- Operat. III.
nendo

$$R = 2\,m\,p\,p - m\,n\,p\,q + \frac{m^4 + 3\,n\,n}{4\,m}\,q\,q,$$

ex quo haec reſultat aequatio:

$$g\left(\frac{(m^4 + 3\,n\,n)^2}{16\,m\,m} - (1 - n\,n)^2\right) = -\tfrac{n}{2}\,(m^4 - 5\,n\,n + 8)\,p.$$

Ex hac autem forma iam ſatis manifeſtum eſt, nullos numeros minores, Problemati ſatisfacientes, elici poſſe; quamobrem vlteriore euolutione ſuperſedemus.

AD

AD

DISSERTATIONEM PATRIS
DE TRIBVS NVMERIS, QVORVM TAM SVMMA QVAM SVMMA PRODVCTORVM EX BINIS SIT QVADRATVM

COMMENTATIO.

Auctore
I. A. EVLERO.

Idem Problema de quo hic ſermo eſt aggreſſus, in ſolutionem incidi, particularem quidem at ab Patris Solutione plane diuerſam et numeros praebentem, qui nec magni nec in illa ſolutione contenti ſunt. Adeoque non incongruum fore arbitror conatus ac repertus meos hic Academiae communicaturus, ſupplementi inſtar ad Diſſertationem modo indicatam adiicere.

Inchoabo a Solutione maxime ſpeciali, quae primo detecta anſam mihi praebuit ſequentem generaliorem inuenire.

§. 1. Conſideremus hos tres numeros
$5(pp-1)$, $8p$ et $6p$,

quorum

quorum quadrata primae conditioni manifeſto ſatisfaciunt. eſt enim

$$25(pp-1)^2+64pp+36pp=$$
$$25(pp-1)^2+100pp=25(pp+1)^2.$$

At altera conditio poſtulat, vt ſit

$$64.\,25pp(pp-1)^2+36.\,25pp(pp-1)^2+36.\,64p^4$$

quadratum: vel

$$2500pp(pp-1)^2+36.\,64p^4=\square,$$

ſiue, diuidendo per quadratum $4pp$,

$$625(pp-1)^2+576pp=\square$$

et euoluendo

$$625p^4-674pp+625=\square.$$

Fingamus huius quadrati radicem $=25pp-v$ et fieri debet

$$625p^4-674pp+625=625p^4-50ppv+vv,$$

vnde eruitur $pp=\frac{625-vv}{674-50v}$.

§. 2. Hic iam ſuccedit, ſumendo $vv=49$ et $v=7$ tam numeratorem fractionis pp quam denominatorem quadrata euadere: fit enim

$$625-vv=576=24^2 \text{ et}$$
$$674-50v=324=18^2, \text{ vnde } pp=\tfrac{24^2}{18^2}$$

et deprimendo per 6^2

$$pp=\tfrac{4^2}{3^2} \text{ et } p=\tfrac{4}{3}.$$

Hinc numeri quaeſiti

$$5(pp-1)=\tfrac{5.7}{9}=\tfrac{35}{9};\ 8p=\tfrac{32}{3} \text{ et } 6p=\tfrac{24}{3},$$

qui multiplicati per 9 ſequentes dabunt numeros integros

Problemati ſatisfacientes: 35; 96 et 72, qui certe ſatis parui ſunt, comparatione facta cum illis minimis, quos pater inuenit ſcilicet: 9; 28 et 432. Noſtri vero numeri 35; 96 et 72, conditiones praeſcriptas ſequenti modo adimplent:

$$35^2 + 96^2 + 72^2 = 125^2$$
$$35^2 . 96^2 + 35^2 . 72^2 + 96^2 . 72^2 = 8088^2.$$

Progrediamur iam ad ſolutionem generaliorem.

§. 3. Ex Analyſi Diophantea conſtat eſſe

$(pp - 1)^2 + 4pp = (pp + 1)^2$, ſimilique modo
$(qq - 1)^2 + 4qq = (qq + 1)^2$.

Multiplicetur prima aequatio per $4qq$ et ſecunda per $(pp + 1)^2$: eritque

$$4qq(pp - 1)^2 + 16ppqq = 4qq(pp + 1)^2,$$
$$(qq - 1)^2(pp + 1)^2 + 4qq(pp + 1)^2 = (pp + 1)^2(qq + 1)^2.$$

Scribatur in hac poſtrema aequatione pro $4qq(pp + 1)^2$ valor ex prima erutus, et obtinebitur ſumma trium quadratorum numero quadrato aequalis

$$(qq - 1)^2(pp + 1)^2 + 4qq(pp - 1)^2 + 16ppqq = (pp + 1)^2(qq + 1)^2.$$

§. 4. Inuentis ergo tribus numeris

$$(qq - 1)(pp + 1);\ 2q(pp - 1) \text{ et } 4pq,$$

quorum quadrata iam primae conditioni ſatisfaciunt, ſupereſt vt ſumma productorum ex binis quadratis reddatur quadratum. Oportet ergo ſit:

$$4qq(qq - 1)^2(pp - 1)^2(pp + 1)^2 + 16ppqq(qq - 1)^2(pp + 1)^2 + 64ppq^4(pp - 1)^2 = \square:$$

vel

vel deprimendo per quadratum $4qq$,

$$(qq-1)^2(p^4-1)^2+4pp(qq-1)^2(pp+1)^2$$
$$+16ppqq(pp-1)^2=\square.$$

Eſt autem

$$(p^4-1)^2+4pp(pp+1)^2=(pp+1)^4.$$

Hinc requiritur quadratum fieri debere

$$(pp+1)^4(qq-1)^2+16ppqq(pp-1)^2=\square.$$

Quae conditio abit in illam ſolutionis ſpecialis §. 1. ponendo $p=2$.

§. 5. Sit breuitatis gratia

$$(pp+1)^4=AA \text{ et } 16pp(pp-1)^2=BB,$$

vt quadratum fieri debeat haec formula:

$$AA(qq-1)^2+BBqq, \text{ vel}$$
$$AAq^4+(BB-2AA)qq+AA,$$

cuius radix ponatur $=Aqq+v$, vt fiat

$$AAq^4+(BB-2AA)qq+AA=AAq^4+2Aqqv+vv.$$

Vnde eruitur $qq=\frac{AA-vv}{2AA-BB+2Av}$.

§. 6. Hic iterum euenit, tam numeratorem quam denominatorem fractionis pro qq inuentae euadere quadratum, ponendo $vv=AA-BB$. Numerator enim $AA-vv$ abit in BB, et Denominator in

$$2AA-BB+2A\sqrt{(AA-BB)},$$

qui manifeſto eſt quadratum formulae

$$A+\sqrt{(AA-BB)}.$$

At reſtitutis pro A et B valoribus ſupra §. 5. poſitis inuenietur

$$AA - BB = p^8 - 12p^6 + 38p^4 - 12p^2 + 1, \text{ id eſt}$$
$$AA - BB = (p^4 - 6p^2 + 1)^2, \text{ ideoque}$$
$$\sqrt{(AA - BB)} = p^4 - 6p^2 + 1,$$

ita vt irrationalitas prorſus e calculo egrediatur.

§. 7. Facto ergo $vv = AA - BB$ obtinetur

$$qq = \frac{BB}{(A + \sqrt{(AA - BB)})^2} \text{ et}$$
$$q = \frac{B}{A + \sqrt{(AA - BB)}}, \text{ ſiue}$$
$$q = \frac{4p(pp - 1)}{(pp + 1)^2 + p^4 - 6p^2 + 1} = \frac{4p(pp - 1)}{2p^4 - 4pp + 2},$$

hoc eſt $q = \frac{2p}{pp - 1}$.

§. 8. Subſtituto denique pro q valore modo invento, ob $qq - 1 = \frac{6pp - p^4 - 1}{(pp - 1)^2}$, tres numeri Problemati ſatisfacientes erunt

$$\frac{(6pp - p^4 - 1)(pp + 1)}{(pp - 1)^2}, \quad 4p \quad \text{et} \quad \frac{8pp}{pp - 1},$$

et multiplicando per $(pp - 1)^2$;

$$(6pp - p^4 - 1)(pp + 1);$$
$$4p(pp - 1)^2; \text{ et } 8pp(pp - 1).$$

Summa quadratorum autem horum numerorum fiet

$$(pp + 1)^2 (qq + 1)^2 (pp - 1)^4,$$

quae ob $qq + 1 = \frac{(pp + 1)^2}{(pp - 1)^2}$ transformatur in $(pp + 1)^6$, ita vt ſumma quadratorum numerorum hic inuentorum non ſolum quadratum fiat, ſed adeo poteſtas ſexta. Porro cum ſumma productorum ex binis numerorum quadratis, quadratum fiat, cuius radix

$$= 2q(Aqq + v) \times (pp - 1)^4; \text{ ob}$$
$$qq = \frac{4pp}{(pp - 1)^2}; \; A = (pp + 1)^2 \text{ et}$$

$v =$

$$v = \sqrt{(AA - BB)} = p^4 - 6pp + 1;$$

haec radix abibit in hanc formam:

$$4p(pp-1)(p^8 - 4p^6 + 22p^4 - 4pp + 1).$$

§. 9. En ergo ſolutionem problematis propoſiti, p pro lubitu aſſumto, tres numeri quaeſiti erunt:

$$(6pp - p^4 - 1)(pp+1) = x;$$
$$4p(pp-1)^2 = y;$$
$$8pp(pp-1) = z;$$

qui binas conditiones ſequenti modo implebunt:

$$xx + yy + zz = (pp+1)^6;$$

$xxyy + xxzz + yyzz = 16pp(pp-1)^2(p^8 - 4p^6 + 22p^4 - 4pp + 1)^2$, vel ſumto $x = (pp+1)(4pp - (pp-1)^2)$;

$$y = 4p(pp-1)^2;$$

$z = 8pp(pp-1)$; fiet

$$xx + yy + zz = (pp+1)^6;$$
$$xxyy + xxzz + yyzz = 16pp(pp-1)^2((pp-1)^4 + 16p^4)^2.$$

Exempla.

§. 10. Ponatur $p = 2$ et inuenietur

$$x = 5.(16-9) = 35$$
$$y = 8.9 = 72$$
$$z = 8.4.3 = 96$$
$$xx + yy + zz = 5^6 = 125^2$$
$$xxyy + xxzz + yyzz = 16.4.9.337^2 = 8088^2$$

quos numeros iam §. 2. per ſolutionem ſpecialiſſimam eruimus.

§. 11. Poſitio $p = 3$ eosdem numeros octies ſumtos praebet: at ponendo $p = 4$ fit

$$x = 17.161 = 2737$$
$$y = 16.15^2 = 3600$$
$$z = 8.16.15 = 1920$$
$$xx + yy + zz = 17^6 = 4913^2$$
$$xxyy + xxzz + yyzz = 16^2.15^2.50881^2 = 12211440^2.$$

§. 12. Cum $pp - 1$, $2p$ et $pp + 1$ latera trianguli rectanguli rationalis exprimant, noſtra ſolutio ſequenti modo concinnior reddi poterit. Sumantur tres numeri a, b, et c, vt ſit $aa + bb = cc$: quo facto fiunt numeri Problemati ſatisfacientes

$$x = c(aa - bb);\ y = 2aab \text{ et } z = 2abb;$$

tum enim erit

$$xx + yy + zz = c^6 \text{ et}$$
$$xxyy + xxzz + yyzz = 4aabb(a^4 + b^4)^2.$$

Pro caſu ſimpliciſſimo, quo $a = 4$, $b = 3$ et $c = 5$, inueniemus numeros iam ſupra erutos

$$x = 35;\ y = 96 \text{ et } z = 72.$$

Ponamus iam $a = 12$; $b = 5$ et $c = 13$ et obtinebimus hanc nouam ſolutionem:

$$x = 1547;\ y = 1440;\ z = 600;$$

vnde fit

$$xx + yy + zz = 2197^2$$
$$xxyy + xxzz + yyzz = 5^2.24^2.21361^2 = 2563320^2.$$

In genere autem erit

$$a = 2mn;\ b = mm - nn \text{ et } c = mm + nn.$$

§. 13.

§. 13. Formulae pro ſolutione noſtri Problematis modo inuentae ad aliam analyſin conducunt, quae, cum concinnior ſit praecedente, hic vtique locum meretur. Sint numeri quaeſiti x, y et z, ita vt fieri debeat

$$xx + yy + zz = MM \text{ et}$$
$$xxyy + xxzz + yyzz = NN.$$

Sumto iam $aa + bb = cc$, ſit $x = am$ et $y = bm$, erit $xx + yy = ccmm$. Poſito ergo

$$z = cn, \text{ erit } MM = cc(mm + nn);$$

quare fiat $m = 2pq$ et $n = pp - qq$, vt ſit

$$MM = cc(pp + qq)^2, \text{ ideoque } M = c(pp + qq).$$

Deinde cum ſit

$$xy = abmm;\ xz = acmn \text{ et } yz = bcmn, \text{ fit}$$
$$NN = mm(aabbmm + aaccnn + bbccnn), \text{ ſiue}$$
$$NN = mm(aabbmm + c^4 nn), \text{ ſeu}$$
$$NN = mm(4aabbppqq + c^4(pp - qq)^2) = \square.$$

Quod euadet manifeſto ſi fuerit

$$cc(pp - qq) = aapp - bbqq.$$

Tum enim erit

$$NN = mm(aapp + bbqq)^2 \text{ et}$$
$$N = m(aapp + bbqq).$$

Vnde p et q ita definiri debent, vt fiat

$$ccpp - ccqq = aapp - bbqq,$$

vnde fit $\frac{pp}{qq} = \frac{cc - bb}{cc - aa} = \frac{aa}{bb}$, conſequenter erit $p = a$ et $q = b$; hinc $m = 2ab$ et $n = aa - bb$: ergo numeri quaeſiti $x = 2aab$; $y = 2abb$ et $z = c(aa - bb)$. Tum autem erit

$$M = c(aa + bb) = c^3 \text{ et } N = 2ab(a^4 + b^4).$$

§. 14. Denique comparationem addam meae Solutionis cum illa, quam Pater in eius diſſertatione tentauit. Poſuit autem

$$x = pp + qq - rr;\ y = 2pr \text{ et } z = 2qr;$$

ita vt hanc formulam:

$$(pp + qq)(pp + qq - rr)^2 + 4ppqqrr$$

adhuc quadratum reddere ſuperſit. Praeſenti noſtro caſu erat $p = a$ et $q = b$, exiſtente $aa + bb = cc$. Erit ergo $x = cc - rr$; $y = 2ar$ et $z = 2br$; quadratum autem eſſe debet haec formula: $cc(cc - rr)^2 + 4aabbrr$, quae caſibus $r = c$ et $r = 0$ manifeſto fit quadratum: Neuter autem horum caſuum nouos valores ſuppeditat. Interim tamen omnino requiritur, vt praeterea caſus innoteſcat: talis autem caſus eſt $r = \frac{ac}{b}$; tum enim haec formula erit

$$c^6(bb - aa)^2 + 4a^4b^4cc, \text{ ſiue}$$
$$c^4(bb - aa)^2 + 4a^4b^4.$$

Eſt vero $cc(bb - aa) = b^4 - a^4$, ergo formula

$$c^4(bb - aa)^2 + 4a^4b^4 = (b^4 - a^4)^2 + 4a^4b^4 = (b^4 + a^4)^2.$$

Potuiſſet etiam poni $r = \frac{bc}{a}$. At vero nemini certe in mentem venire potuiſſet, hos valores in vſum vocare, vel diuinando reperire. Nunc vero poſito $r = \frac{ac}{b}$, numeri quaeſiti ſunt

$$x = \frac{cc(bb - aa)}{bb};\ y = \frac{2aac}{b};\ z = 2ac, \text{ ſiue}$$
$$x = c(bb - aa);\ y = 2aab;\ z = 2abb,$$

quae eſt ipſa mea ſolutio. At vero iſte caſus cognitus deducere poteſt ad infinitos alios: minimus autem eorum certe numeros enormes pro x, y et z eſſet daturus, qui forte ad Trilliones et Quadrilliones adſurgerent.

DE

DE EPICYCLOIDIBUS IN SUPERFICIE SPHAERICA DESCRIPTIS.

Auctore

A. J. LEXELL.

§. 1.

Illuſtris *Hermannus* in I. Tomo veterum Commentariorum, de Epicycloidibus in ſuperficie Sphaerae deſcriptis, agens, eam ipſis tribuit proprietatem, quod hae lineae curuae ſingulae rectificabiles eſſent; verum poſtmodum inuentum eſt, inſignem hunc Mathematicum in ratiocinio, quo ad iſtam perductus erat concluſionem, humani quid paſſum fuiſſe. Quamuis itaque hae curuae modo dicta proprietate non gaudeant, tamen affectiones, quae illis competunt, egregiae omnino ſunt, et formulis omnino concinnis ſe exprimi patiuntur, quamobrem eas euoluiſſe operae pretium erit.

§. 2. Si in peripheria circuli cuiusdam S G I in ſuperficie ſphaerica deſcripti capiatur punctum G, atque concipiatur circulum hunc S G I volui ſuper alio circulo immobili R I B, curua K G M, a puncto G deſcripta, nobis dicetur Epicyclois ſphaerica. Pro natura autem hu- Tab. I. Fig. 1.

 ius

ius curuae explicanda, concipiamus punctum G, quod initio rotationis fuit in B, iam perueniſſe in N, ita vt arcus B F N ſemiſſin peripheriae circuli B F N conſtituat, eritque per naturam rotationis, arcus B F N = arcui B I K in circulo immobili, et arcus G I = arcui K I pro ſitu circuli mobilis I G S. Polo A, interuallo A G, deſcribatur circulus parallelus G L F E, qui occurrat peripheriae B F N in puncto F, arcubus autem A P, A D, centra circulorum mobilis et immobilis iungentibus, in punctis L et E, tumque iungantur puncta G, P, F, D, arcubus circulorum maximorum, vt etiam A G, A F. Quum nunc in triangulis A P G, A D F, ſit A G = A F, P G = F D, A P = A D, erit angulus A P G = A D F, et P A G = E A F, hinc fiet arc. G I = arc. F B, arc. G L = arc. F D, et R I = Q B, ex quo colligitur G F = L E et R Q = I B. Nunc vero eſt K I = G I et K I B = ſemip. B F N, ideoque I B = arc. F N, hinc R Q = arc. F N, atqui eſt R Q : G F = ſin. A I : ſin. A G, quare fiet G F = arc. F N. $\frac{\text{ſin. } AG}{\text{ſin. } AI}$, quae proprietas inſtar aequationis, naturam curuae K G M exprimeritis, inſeruire poteſt. Quia eſt arc. F N = ang. F D N. ſin. F D, iſta quoque aequatio pro linea K G M adhiberi poteſt: G F = ang. F D N. $\frac{\text{ſin. } FD . \text{ſin. } AG}{\text{ſin. } AI}$.

§. 3. Si communi more pro lineis curuis, in ſuperficie Sphaerae deſcriptis, recepto, naturam lineae curuae K G M exprimere voluiſſemus, aequationem quaerere debuiſſemus inter angulum B A G vel K A G et arcum A G, quae aequatio complicatior ſane euadit quam vt pro ſequentibus quaeſtionibus, vbi de tangentibus et radiis curuedinis harum Epicycloidum agitur, cum vſu adhiberi queat. Sequenti vero ratione ad huiusmodi aequationem per-

pertingere licebit. Dicantur anguli K A G $= \phi$, K A I $= \eta$, A P G $= \theta$, arcus vero A I, P I, A G reſpectiue exprimantur per a, b, v; eritque

$$\text{ang. } GPI = \frac{arc.\, GI}{ſin.\, PI} = \frac{arc.\, KI}{ſin.\, PI} = \text{ang. } KAI . \frac{ſin.\, AI}{ſin.\, PI}, \text{ ſeu } \theta = \eta . \frac{ſin.\, a}{ſin.\, b}.$$

Deinde habetur in triangulo ſphaerico G P A,

$$\cot.\, (\eta - \phi) = \frac{coſ.\, b.\, ſin.\, (a+b) - ſin.\, b\, coſ.\, (a+b)\, coſ.\, \theta}{ſin.\, b.\, ſin.\, \theta},$$

vbi ſubſtituto pro θ eius valore, orietur aequatio inter η et ϕ, ex qua angulum η per ϕ determinare oportet, vnde habebitur quoque angulus θ per ϕ expreſſus, quare dabitur aequatio inter ϕ et v, quum ſit

$$coſ.\, v = coſ.\, b.\, coſ.\, (a+b) + ſin.\, b.\, ſin.\, (a+b)\, coſ.\, \theta.$$

§. 4. Pro tangente Epicycloidis K I M inueſtiganda, concipiamus ductum eſſe circulum parallelum $gHlfe$, proximum ipſi G L E, qui occurrat curuae K G M in puncto H, eritque per proprietatem modo inuentam Epicycloidum, Hf : fN $=$ ſin. A G : ſin. A I, hincque Hg : Gg $=$ ſin. A G : ſin. A I, ob Hg $=$ G F $-$ Hf et Gg $=$ Ff $=$ F N $-$ fN. Hinc fiet ſin. H G g : ſin. G H g $=$ ſin. A G : ſin. A I $=$ ſin. G I P : ſin. A G I $=$ ſin. P G I : ſin. A G I, et alternando, ſin. H G g : ſin. P G I $=$ ſin. G H g : ſin. A G I $=$ ſin. H G L : ſin. A G I, vnde ob ang. P G g $= 90°$, fit coſ. P G H : ſin. P G I $=$ ſin. H G L : coſ. L G I, cui analogiae, ob P G H $+$ P G I $=$ H G L $+$ L G I, aliter ſatisfieri nequit, quam ponendo coſ. P G H $=$ ſin. P G I et ſin. H G L $=$ coſ. L G I, hoc eſt angulum I G H rectum; vnde fiet arcus circuli maximi G I normalis ad Epicycloidem, et ſi huic arcui ducatur per G perpendicularis, is tanget Epicycloidem in puncto G. Caeterum haec proprietas mox

ex ipſa geneſi Epicycloidum innoteſcit, quippe quum arcus circuli, polo I, interuallo G I deſcripti, non poſſit non intime congruere cum arcu Epicycloidis G H.

§. 5. Ob H G : G g = ſin. H g G : ſin. H G L = ſin. A G P : ſin. A G I, quia ang. P G g = 90, A G L = 90°, et I G H = 90°, vnde ſin. H g G = coſ. P G L = ſin. A G P et ſin. H G L = coſ. L G I = ſin. A G I, habebimus

$$H G : G g = \text{ſin. } A P G.\ \text{ſin. } A P : \text{ſin. } P I G.\ \text{ſin. } A I;$$

ex quo quum ſit

$$\text{ſin. } A P G : \text{ſin. } P I G = \text{ſin. } G I : \text{ſin. } P G,$$

conficitur

$$H g : G g = \text{ſin. } G I.\ \text{ſin. } A P : \text{ſin. } P G.\ \text{ſin. } A I, \text{ ſiue}$$

$$H g. = F f. \frac{\text{ſin. } F B.\ \text{ſin. } A P}{\text{ſin. } D B.\ \text{ſin. } A B}.$$

Exprimamus nunc angulum F D B per 2ψ, arcum F B per u, D O per z, arcus autem A B, B D vt ſupra per a, b, eritque elementum Epicycloidis

$$= 2 d\psi \text{ ſin. } u \frac{\text{ſin. } (a+b)}{\text{ſin. } a}.$$

Iam uero ob Tang. z = Tang. b coſ. ψ, fit

$$\frac{dz}{\text{coſ. } z^2} = - d\psi \text{ tang. } b \text{ ſin. } \psi = - \frac{d\psi}{\text{coſ. } b} \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} u,$$

$$\text{ob ſin. } b \text{ ſin. } \psi = \text{ſin. } \tfrac{1}{2} u.$$

Multiplicetur haec aequatio vtrinque per

$$2 \text{ coſ. } \tfrac{1}{2} u = 2 \frac{\text{coſ. } b}{\text{coſ. } z}, \text{ fietque}$$

$$\frac{2 dz \text{ coſ. } b}{\text{coſ. } z^3} = - \frac{2 d\psi \text{ ſin. } \frac{1}{2} u \text{ coſ. } \frac{1}{2} u}{\text{coſ. } b} = - \frac{d\psi \text{ ſin. } u}{\text{coſ. } b},$$

hincque colligitur

$$d\psi \text{ ſin. } u = - \frac{2 dz \text{ coſ. } b^2}{\text{coſ. } z^3},$$

quamobrem fiet elementum Epicycloidis

= −

$$= - \frac{4\,dz}{\text{coſ.}\,z^3} \cdot \frac{\text{ſin.}\,(a+b)\,\text{coſ.}\,b^2}{\text{ſin.}\,a}.$$

Atqui eſt

$$\int \frac{dz}{\text{coſ.}\,z^3} = \tfrac{1}{2}\,\frac{\text{ſin.}\,z}{\text{coſ.}\,z^2} + \tfrac{1}{2}\,l\,\frac{\text{coſ.}\,z}{1-\text{ſin.}\,z} = \tfrac{1}{2}\,\frac{\text{ſin.}\,z}{\text{coſ.}\,z^2} + \tfrac{1}{2}\,l\,\frac{1+\text{ſin.}\,z}{\text{coſ.}\,z}.$$

erit igitur arcus Epicycloidis

$$KG = C - \frac{2\,\text{ſin.}\,(a+b)\,\text{coſ.}\,b^2}{\text{ſin.}\,a} \cdot \frac{\text{ſin.}\,z}{\text{coſ.}\,z^2} - \frac{2\,\text{ſin.}\,(a+b)\,\text{coſ.}\,b^2}{\text{ſin.}\,a}\,l\,\frac{1+\text{ſin.}\,z}{\text{coſ.}\,z}.$$

Quantitas autem conſtantis C definietur ex illo caſu, quo K G euaneſcit, hoc eſt vbi $z = b$; erit igitur

$$C - \frac{2\,\text{ſin.}\,(a+b)\,\text{ſin.}\,b}{\text{ſin.}\,a} - \frac{2\,\text{ſin.}\,(a+b)\,\text{coſ.}\,b^2}{\text{ſin.}\,a}\,l\,\frac{1+\text{ſin.}\,b}{\text{coſ.}\,o} = 0,$$

ideoque in genere arcus Epicycloidis

$$KG = \frac{2\,\text{ſin.}\,a+b}{\text{ſin.}\,a}\left(\text{ſin.}\,b - \text{coſ.}\,b^2\,\frac{\text{ſin.}\,z}{\text{coſ.}\,z^2} + \text{coſ.}\,b^2\,l\,\frac{(1+\text{ſin.}\,b)\,\text{coſ.}\,z}{(1+\text{ſin.}\,z)\,\text{coſ.}\,b}\right).$$

Patet itaque arcus Epicycloidum non eſſe rectificabiles, niſi pro caſu coſ. $b = 0$, hoc eſt ſi circulus S G I fuerit maximus, tum vero habebitur $KG = 2\,\text{cot.}\,a\,(1 - \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,u^2)$, ob

$$\frac{\text{coſ.}\,b^2}{\text{coſ.}\,z^2} = \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,u^2$$

et ſin. z = ſin. b, hinc fiet $KG = 2\,\text{cot.}\,a\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,u^2$. Pro caſu vbi $z = 0$, qui erit pro arcu Epicycloidis a K vsque ad N deſcripti, habebitur iſte arcus ſic expreſſus:

$$\frac{2\,\text{ſin.}\,(a+b)}{\text{ſin.}\,a}\left(\text{ſin.}\,b + \text{coſ.}\,b^2\,l\left(\frac{1+\text{ſin.}\,b}{\text{coſ.}\,b}\right)\right).$$

Exiſtente igitur $b = 90^\circ$, iſta expreſſio erit $= 2\,\text{cot.}\,a$, at poſito $a = 90^\circ$, fiet $= \text{ſin.}\,2\,b + 2\,\text{coſ.}\,b^2\,l\,\frac{1+\text{ſin.}\,b}{\text{coſ.}\,b}$.

§. 6. Pro curuatura elementi G H aeſtimanda, quaeratur Polus V circuli in ſuperficie ſphaerica deſcripti, qui cum arcu G H intimum habet contactum; inuenietur autem iſte Polus, vbi bini arcus circulorum maximorum inter ſe proximi G I, H i ad elementum G H normales ſe interſecant. Iam ſumatur in arcu G I elementum I m = I i, et iungantur A i, H i, G m, P m arcubus Tab. I. Fig. 2.

 circu-

circulorum maximorum. Quum vero ſit arcus circuli maximi G I normalis ad G H, erit quoque H I ipſi normalis, et proxime = G I, tum vero quoque G *m* = H *i*, I *m* = I *i* et ang. G I *m* = H I *i*, vnde ang. G I H = *m* I *i*.
Tab. I. Fig. 3. Iam ſi per I concipiatur ductus arcus circuli maximi I T, tangens arcus G I *m*, K I *i*, facile demonſtrabitur eſſe *m* I *i* = I P *m*. coſ. P I + I A *i* coſ. A I. Eſt enim in triangulo P I *m*, cot. P I *m*. cot. I P *m* = coſ. P I, hinc cot. P I *m* = tang. I P *m*. coſ. P I, et ob ang. P I T = 90°, tang. T I *m* = tang. I P *m*. coſ. P I, ſiue T I *m* = I P *m*. coſ. P I. Similiter demonſtrabitur eſſe T I *i* = I A *i* coſ. A I, hinc *m* I *i* = I P *m* coſ. P I + I A *i*. coſ. A I; atqui ob I *m* = I *i* eſt I P *m*. ſin. P I = I A *i*. ſin. A I, proinde

$$GIH = mIi = IAi.\ \text{ſin.}\ AI\,(\text{cot.}\ AI + \text{cot.}\ PI)$$
$$= IAi.\frac{\text{ſin.}\ AP}{\text{ſin.}\ PI} = IPm\frac{\text{ſin.}\ AP}{\text{ſin.}\ AI}.$$

Porro ſi polo G interuallo G I deſcribatur arcus I *n*, habetur

$$\text{ang.}\ IGm = \frac{In}{\text{ſin.}\ GI} = \frac{Im.\ \text{coſ.}\ PIG}{\text{ſin.}\ GI} = IPm\frac{\text{ſin.}\ PI\ \text{coſ.}\ PIG}{\text{ſin.}\ GI};$$

atqui eſt

$$\text{coſ.}\ PIG = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}GI.\ \text{cot.}\ PI,$$

hinc prodibit

$$IGm = IPm.\ \frac{\text{coſ.}\ PI.\ \text{tang.}\ \frac{1}{2}GI}{\text{ſin.}\ GI} = \frac{IPm\ \text{coſ.}\ PI}{2\ \text{coſ.}\ \frac{1}{2}GI^2},\ \text{ob}$$

$$\text{ſin.}\ GI = 2\ \text{ſin.}\ \tfrac{1}{2}GI.\ \text{coſ.}\ \tfrac{1}{2}GI.$$

Fiet igitur quoque

$$IHi = IGm = \frac{IPm\ \text{coſ.}\ PI}{2\ \text{coſ.}\ \frac{1}{2}GI^2},$$

hincque

G I H

$$GIH : IHV = \frac{\text{ſin.}\, AP}{\text{ſin.}\, AI} : \frac{\text{coſ.}\, PI}{2\text{coſ.}\, \tfrac{1}{2} GI^2} = \frac{\text{ſin.}\, AP}{\text{ſin.}\, AI} : \frac{\text{coſ.}\, PI}{1 + \text{coſ.}\, GI}.$$

Atqui eſt

$$GIH : IHV = \text{ſin.}\, GIH : \text{ſin.}\, IHV = \text{ſin.}\, GV : \text{ſin.}\, IV,$$

hinc fiet

$$\text{ſin.}\, GV : \text{ſin.}\, IV = \frac{\text{ſin.}\, AP}{\text{ſin.}\, AI} : \frac{\text{coſ.}\, PI}{1 + \text{coſ.}\, GI},$$

vnde ob

$$\text{ſin.}\, GV = \text{ſin.}\, GI\, \text{coſ.}\, IV + \text{coſ.}\, GI\, \text{ſin.}\, IV,$$

colligitur

$$\text{ſin.}\, GI.\, \text{cot.}\, IV + \text{coſ.}\, GI = \frac{\text{ſin.}\, AP\, (1 + \text{coſ.}\, GI)}{\text{ſin.}\, AI.\, \text{coſ.}\, PI},$$

ideoque

$$\text{ſin.}\, GI.\, \text{cot.}\, IV = \frac{\text{ſin.}\, AP + \text{coſ.}\, GI\, (\text{ſin.}\, AP - \text{ſin.}\, AI\, \text{coſ.}\, PI)}{\text{ſin.}\, AI\, \text{coſ.}\, PI}$$
$$= \frac{\text{ſin.}\, AP + \text{coſ.}\, GI.\, \text{coſ.}\, AI.\, \text{ſin.}\, PI}{\text{ſin.}\, AI\, \text{coſ.}\, PI},$$

tumque

$$\text{cot.}\, IV = \frac{\text{ſin.}\, AP + \text{coſ.}\, GI\, \text{coſ.}\, AI\, \text{ſin.}\, PI}{\text{ſin.}\, GI\, \text{ſin.}\, AI\, \text{coſ.}\, PI} \quad \text{vel}$$

$$\text{tang.}\, IV = \frac{\text{ſin.}\, GI.\, \text{ſin.}\, AI\, \text{coſ.}\, PI}{\text{ſin.}\, AP + \text{coſ.}\, GI\, \text{coſ.}\, AI\, \text{ſin.}\, PI}.$$

Si PI ponatur $= 90°$, fiet coſ. $PI = 0$, ideoque tang. $PV = 0$, hincque punctum V cum puncto I coincidet, quod etiam per ſe eſt manifeſtum, eritque tum Epicyclois GKM curua, quae oritur euolutione circuli minoris KIi. Poſito vero $AI = 90°$ fiet coſ. $AI = 0$, ſin. $AP =$ coſ. PI, hincque pro iſto caſu tang. $IV =$ ſin. GI.

§. 7. Sequenti autem ratione valor arcus IV quoque determinari poteſt. Iungatur AV arcu circuli maximi, eritque

$$\text{coſ.}\, AV = \text{coſ.}\, AI.\, \text{coſ.}\, IV + \text{ſin.}\, AI.\, \text{ſin.}\, IV.\, \text{coſ.}\, AIV.$$

Huius aequationis differentiale capiatur, ſolis arcu IV et angulo

angulo A I V pro variabilibus habitis, eritque:

$$-d.IV\,\text{coſ.}\,AI\,\text{ſin.}\,IV + d.IV\,\text{coſ.}\,IV\,\text{ſin.}\,AI\,\text{coſ.}\,AIV$$
$$-d.AIV.\,\text{ſin.}\,AI\,\text{ſin.}\,IV\,\text{ſin.}\,AIV = 0, \text{ ideoque}$$
$$\text{cot.}\,IV = \frac{d\,AIV.\,\text{ſin.}\,AI\,\text{ſin.}\,AIV + d.IV\,\text{coſ.}\,AI}{d.IV.\,\text{ſin.}\,AI.\,\text{coſ.}\,AIV}.$$

Patet vero eſſe

$$d.IV = -d.GI = -nm = -Im.\,\text{ſin.}\,PIG,$$

tumque

$$d.AIV = d.GIP = -IGm = -\frac{In}{\text{ſin.}\,GI} = -Im.\frac{\text{coſ.}\,PIG}{\text{ſin.}\,GI},$$

his igitur valoribus ſubſtitutis prodit:

$$\text{cot.}\,IV = \frac{\text{ſin.}\,AI.\,\text{coſ.}\,PIG + \text{coſ.}\,AI.\,\text{ſin.}\,GI}{\text{ſin.}\,GI\,\text{ſin.}\,AI.\,\text{coſ.}\,PIG};$$

tum vero quia eſt

$$\text{coſ.}\,PG = \text{coſ.}\,PI.\,\text{coſ.}\,GI + \text{ſin.}\,PI\,\text{ſin.}\,GI\,\text{coſ.}\,PIG,$$

conſequemur

$$\text{coſ.}\,PIG = \frac{\text{coſ.}\,PG - \text{coſ.}\,PI\,\text{coſ.}\,GI}{\text{ſin.}\,PI.\,\text{ſin.}\,GI} = \frac{\text{coſ.}\,PI\,(1 - \text{coſ.}\,GI)}{\text{ſin.}\,PI.\,\text{ſin.}\,GI},$$

ideoque hoc valore ſuffecto:

$$\text{cot.}\,IV = \frac{\text{ſin.}\,AI\,\text{coſ.}\,PI\,(1 - \text{coſ.}\,GI) + \text{coſ.}\,AI.\,\text{ſin.}\,PI.\,\text{ſin.}\,GI^2}{\text{ſin.}\,GI.\,\text{ſin.}\,AI\,\text{coſ.}\,PI\,(1 - \text{coſ.}\,GI)},$$

vnde ob

$$\text{ſin.}\,GI^2 = (1 - \text{coſ.}\,GI)\,(1 + \text{coſ.}\,GI),$$

prodit

$$\text{cot.}\,IV = \frac{\text{ſin.}\,AI\,\text{coſ.}\,PI + \text{coſ.}\,AI\,\text{ſin.}\,PI\,(1 + \text{coſ.}\,GI)}{\text{ſin.}\,GI \times \text{ſin.}\,AI\,\text{coſ.}\,PI}$$
$$= \frac{\text{ſin.}\,AP + \text{coſ.}\,AI\,\text{ſin.}\,PI\,\text{coſ.}\,GI}{\text{ſin.}\,GI\,\text{coſ.}\,PI\,\text{ſin.}\,AI},$$

ob $\text{ſin.}\,AP = \text{ſin.}\,(AI + PI) = \text{ſin.}\,AI + \text{coſ.}\,PI + \text{coſ.}\,AI\,\text{ſin.}\,PI.$

§. 8. Iam quoque operae pretium erit, vt quadraturam ſpatii I K G I, arcu circuli minoris I K, arcu Epicycloidis K G et arcu circuli maximi G I, comprehenſi, determinemus. Eſt vero elementum huius ſpatii, trape-

trapeziolum in ſuperficie ſphaerica $GHiI = GHV - IiV$. Iam ſi ſemiſſis totius ſuperficiei ſphaericae exprimatur litera S, erit $\Delta\, GHV : S =$ ang. $IVi\,(1 - \text{coſ.}\, GV) : 360°$

$$\text{et } \Delta\, IiV : S = \text{ang.}\, IVi\,(1 - \text{coſ.}\, IV) : 360°,$$

proinde

$$GHiI = \text{ang.}\, IVi\,(\text{coſ.}\, IV - \text{coſ.}\, GV)\,\tfrac{S}{360°}.$$ Fig. 3.

Nunc vero eſt in triangulo IHV,

$$\text{ang.}\, IVi : IHi = \text{ſin.}\, HI : \text{ſin.}\, IV,$$

ideoque

$$IVi = \frac{IGm.\,\text{ſin.}\,GI}{\text{ſin.}\,IV},\ \text{ob}\ IHi = IGm\ \text{et}\ HI = GI;$$

fiet igitur

$$GHiI = IGm.\frac{\text{ſin.}\,GI}{\text{ſin.}\,IV}\,(\text{coſ.}\,IV - \text{coſ.}\,GV)\,\tfrac{S}{360°}.$$

Hinc quum ſit

$$\text{coſ.}\,GV = \text{coſ.}\,IG.\,\text{coſ.}\,IV - \text{ſin.}\,IG.\,\text{ſin.}\,IV,$$

loco expreſſionis

$$\frac{\text{coſ.}\,IV - \text{coſ.}\,GV}{\text{ſin.}\,IV},\ \text{habebimus}$$

$$\text{cot.}\,IV - \text{coſ.}\,IG.\,\text{cot.}\,IV + \text{ſin.}\,IG = \text{cot.}\,IV(1 - \text{coſ.}\,IG) + \text{ſin.}\,IG,$$

hincque

$$\frac{\text{ſin.}\,IG}{\text{ſin.}\,IV}(\text{coſ.}\,IV - \text{coſ.}\,GV) = \text{cot.}\,IV.\,\text{ſin.}\,IG\,(1 - \text{coſ.}\,IG)$$
$$+ \text{ſin.}\,IG^2 = (1 - \text{coſ.}\,IG)(\text{cot.}\,IV.\,\text{ſin.}\,IG + 1 + \text{coſ.}\,IG).$$

Subſtituto nunc pro cot. IV valore ſupra inuento, fiet

$$\text{cot.}\,IV.\,\text{ſin.}\,IG = \frac{\text{ſin.}\,AP + \text{coſ.}\,AI\,\text{ſin.}\,PI\,\text{coſ.}\,GI}{\text{coſ.}\,PI\,\text{ſin.}\,AI}\ \text{et}$$

$$\text{cot.}\,IV\,\text{ſin.}\,IG + \text{coſ.}\,IG = \frac{\text{ſin.}\,AP + (\text{ſin.}\,PI\,\text{coſ.}\,AI + \text{coſ.}\,PI\,\text{ſin.}\,AI)\,\text{coſ.}\,GI}{\text{coſ.}\,PI.\,\text{ſin.}\,AI}$$
$$= \frac{\text{ſin.}\,AP\,(1 + \text{coſ.}\,GI)}{\text{ſin.}\,AI\,\text{coſ.}\,PI},$$

vnde demum conſequemur:

$$\frac{\text{ſin.}\,IG}{\text{ſin.}\,IV}(\text{coſ.}\,IV - \text{coſ.}\,GV) = (1 - \text{coſ.}\,IG)\left(1 + \frac{\text{ſin.}\,AP\,(1 + \text{coſ.}\,GI)}{\text{ſin.}\,AI\,\text{coſ.}\,PI}\right).$$

Si nunc angulus Q B F $= 90° -$ G I P (Fig. I.) exprimatur per Φ, arcus I G per u et arcus A I, P I vt antea per a, b, erit elementum

$$\text{G H } i \text{ I} = d\Phi(1 - \text{coſ.}\, u)\left(1 + \frac{\text{ſin.}(a+b)(1+\text{coſ.}\, u)}{\text{ſin.}\, a\, \text{coſ.}\, b}\right)\frac{S}{360°}.$$

Iam vero pro integrali huius differentialis determinando, primum obſeruo eſſe,

$$d\Phi(1 - \text{coſ.}\, u) = 2\, d\Phi - 2\, d\psi\, \text{coſ.}\, b,$$

deſignante 2ψ angulum F D B. Eſt enim per §. 6.

$$\text{I G } m = \frac{\text{I P } m\ \text{coſ. P I}}{\text{coſ.}\, \frac{1}{2}\, \text{G I}^2},\ \text{ſiue}\ d\Phi = \frac{2\, d\psi\, \text{coſ.}\, b}{2\, \text{coſ.}\, \frac{1}{2}\, u^2},$$

hinc

$$d\Phi(1 + \text{coſ.}\, u) = 2\, d\psi\, \text{coſ.}\, b,\ \text{ob}\ 2\, \text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}\, u^2 = 1 + \text{coſ.}\, u,$$

ideoque

$$d\Phi(1 - \text{coſ.}\, u) = 2\, d\Phi - 2\, d\psi\, \text{coſ.}\, b.$$

Tum vero quoque fiet

$$d\Phi(1 - \text{coſ.}\, u^2)\frac{\text{ſin.}(a+b)}{\text{ſin.}\, a\, \text{coſ.}\, b} = 2\, d\Phi(1 + \text{coſ.}\, u)\frac{\text{ſin.}(a+b)}{\text{ſin.}\, a\, \text{coſ.}\, b}$$
$$- 2\, d\psi(1 + \text{coſ.}\, u)\frac{\text{ſin.}(a+b)}{\text{ſin.}\, a} = 4.\, d\psi.\, \frac{\text{ſin.}(a+b)}{\text{ſin.}\, a}$$
$$- 4\, d\psi\, \text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}\, u^2\, \frac{\text{ſin.}(a+b)}{\text{ſin.}\, a} = 4\, d\psi\, \frac{\text{ſin.}(a+b)}{\text{ſin.}\, a}\, \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}\, u^2$$
$$= 4\, d\psi\, \frac{\text{ſin.}(a+b)}{\text{ſin.}\, a}\, \text{ſin.}\, b^2\, \text{ſin.}\, \psi^2$$
$$= 2\, d\psi\, \frac{\text{ſin.}(a+b)}{\text{ſin.}\, a}\, \text{ſin.}\, b^2\, (1 - \text{coſ.}\, 2\psi).$$

Fiet igitur

$$\int d\Phi(1 - \text{coſ.}\, u^2)\frac{\text{ſin.}(a+b)}{\text{ſin.}\, a\, \text{coſ.}\, b} = 2\psi\, \frac{\text{ſin.}(a+b)\, \text{ſin.}\, b^2}{\text{ſin.}\, a}$$
$$- \text{ſin.}\, 2\psi\, \frac{\text{ſin.}(a+b)\, \text{ſin.}\, b^2}{\text{ſin.}\, a}.$$

Praeterea vero eſt $\int d\Phi(1 - \text{coſ.}\, u)\frac{S}{360°} =$ ſegmento ſphaerae, quod continetur arcu circuli maximi F B et arcu circuli

circuli minoris FB. Hinc pro caſu, quo punctum G in N incidit, ideoque $2\psi = 180^\circ$, fiet ſpatium illud inter Epicycloidem et arcum circuli KIB, nec non NB contentum, aequale ſpatio $BFNB + \frac{S}{2} \cdot \frac{\text{ſin.}(a+b)\,\text{ſin.}\,b^2}{\text{ſin.}\,a}$, vbi ob

$$BFNB = \tfrac{S}{2}(1 - \text{coſ.}\,b), \text{ erit ſpatium illud}$$
$$= \tfrac{S}{2}(1 - \text{coſ.}\,b)\left(1 + \frac{\text{ſin.}(a+b)(1+\text{coſ.}\,b)}{\text{ſin.}\,a}\right).$$

Hinc ſi ſtatuatur $b = 90^\circ$, fiet hoc ſpatium $= \frac{S}{2}\,\text{cot.}\,a$, ob ſpatium BFNB hoc in caſu plane euaneſcens. At pro caſu $a = 90^\circ$, fiet $= \frac{S}{2}(1 - \text{coſ.}\,b)\,(1 + \text{coſ.}\,b + \text{coſ.}\,b^2)$. Praeterea quoque obſeruare conuenit, ſpatium illud epicycloidicum in genere ſic exprimi:

$$\tfrac{S}{360^\circ}\left(2\,\Phi - 2\,\psi\,\text{coſ.}\,b + 2\,\psi\,\frac{\text{ſin.}(a+a)\,\text{ſin.}\,b^2}{\text{ſin.}\,a} - \text{ſin.}\,2\,\psi\,\frac{\text{ſin.}(a+b)\,\text{ſin.}\,b^2}{\text{ſin.}\,a}\right),$$

vnde concluditur caſu, quo

$$\Phi = \psi\,\text{coſ.}\,b - \psi\,\frac{\text{ſin.}(a+b)\,\text{ſin.}\,b^2}{\text{ſin.}\,a},$$

ſpatium iſtud abſolutam admittere quadraturam, ex qua aequatione, quum ſit $\text{tang.}\,\Phi = \text{tang.}\,\psi\,\text{coſ.}\,b$, valor ipſius anguli Φ vel ψ determinari poteſt.

§. 9. Praeter Epicycloidum ſpeciem iam conſideratam heic quoque attentionem meretur linea curua, quae generatur, dum voluendo circulum SHI ſuper TIB, punctum quoddam G, non quidem in ipſa peripheria circuli, ſed vel intra eandem vel extra ſumtum, curuam deſcribit. Etſi enim huius curuae proprietates non aeque elegantes ſint ac iſtae, curuae modo conſideratae, tamen nec inueſtigatio proprietatum pro hac curua valde operoſas requirit disquiſitiones. Concipiamus igitur cur-

vam a puncto G deſcriptam eſſe M C G, et ducto arcu circuli maximi P G a centro circuli mobilis S H I ad punctum G, illum occurrere peripheriae S H I in puncto H, tumque initio rotationis punctum H coincidiſſe cum puncto T circuli immobilis T I B, quare erit arcus H I = arcu T I. Porro ſi ſtatuamus punctum H perueniſſe in N, ita vt N K B aequetur ſemiſſi peripheriae circuli mobilis, erit N K B = arc. T I B, vnde fiet

arc. I B = arc. N K B – H I = S H I – H I = arc. S H.

Deinde ſi Polo A circuli immobilis T I B, interuallo A G, deſcribatur circulus minor G L F E, qui occurrat arcubus circulorum maximorum, polos circuli immobilis A et mobilis P, D, iungentibus in punctis L, E, arcubus autem circulorum minorum, polis P, D, interuallis B G et F D, exiſtente F D = F G, deſcriptis in G et F, tumque iungantur A G, A F, D F arcubus circulorum maximorum, erit ob P G = D F, A G = A F, A P = A D, ang. A P G = A D F et G A L = F A E, hinc arc. G L = arc. F E, et G F = L E. Eſt vero arcus L E: arc. I B = ſin. A G: ſin. A B, ideoque arc. G F: arc. I B = ſin. A G: ſin. A B, hincque arc. G F: arc. S H = ſin A G: ſin. A B; atqui eſt arc. S H: arc. Q G = ſin. PH: ſin. P G, vnde, componendo rationes, arc. G F: arc. Q G = ſin. A G. ſin. P H: ſin. A B. ſin. P G, haecque proprietas inſtar aequationis pro curua M C G inſeruire poteſt.

§. 10. Sit iam per punctum C curuae M C G, puncto G proximum, deſcriptus, Polo A, circulus parallelus g C f, qui occurrat circulis Q G U, R F f in punctis g, f, eritque per proprietatem modo demonſtratam arc. C f: arc.

arc. Q g = ſin. A G. ſin. P H: ſin. A B. ſin. P G, hincque arc. G f − arc. C f: arc. Q G − arc. Q g = ſin. A G. ſin. P H: ſin. A B ſin P G, vel

g C: G g = ſin. A G ſin. P H: ſin. A B. ſin. P G.

Quum igitur ſit

g C : G g = ſin. g G C : ſin. G C g, et G C g = C G L,

ob C G L = C G A − 90°, fiet

ſin. g G C : coſ. C G A = ſin. A G ſin. P H : ſin. A B ſin. P G.

Praeterea vero eſt

ſin. A G : ſin. A I = ſin. P I G : ſin. A G I et

ſin. P H : ſin. P G = ſin. P G I : ſin. P I G, vnde fit:

ſin. A G. ſin. P H : ſin. A B. ſin. P G = ſin. P G I. ſin. A G I,

quamobrem conſequemur

ſin g G C : − coſ. C G A = ſin. P G I : ſin. A G I, ſiue

coſ. C G P : ſin. P G I = ſin. P G L : coſ. L G I, ob A G L = 90°;

huic autem aequationi aliter ſatisfieri nequit, quam ponendo I G C = 90°, ita vt ſit

coſ. G C P = ſin. P G I et ſin. P G L = coſ. L G I.

Quare iam patet arcum circuli maximi, a puncto deſcribente G ad punctum contactus I ductum, etiam pro hoc caſu fore normalem ad curuam deſcriptam, quod caeteroquin ex ipſa geneſi curuae pateſcit. Immo in genere, quaecunque fuerit linea curua, quae ſuper alia quacunque in ſuperficie ſphaerica rotatur, ſi capiatur punctum quoddam G, ſiue in priori illa curua, ſiue intra eandem, ſeu etiam extra, curuae a puncto G deſcriptae ea erit pro-

 prietas,

prietas, vt iuncto puncto G cum puncto contactus arcu circuli maximi G I, ſit I G normalis ad iſtam curuam.

§. 11. Pro determinando arcu curuae deſcriptae M C G, habemus C G : G g = ſin. C g G : ſin. C G L = ſin. L G g : ſin. C G L = coſ. P G L : coſ. L G I, ob P G g = 90° et C G I = 90°, tum vero ob A G L = 90, fit coſ. P G L = ſin. A G P et coſ. L G I = ſin. A G I, hincque C G : G g = ſin. A G P : ſin. A G I. Atqui in triangulo A G P eſt ſin. A G. ſin. A G P = ſin. A P. ſin. A P G et in triangulo A G I, ſin. A G. ſin. A G I = ſin. A I. ſin. P I G, vnde ſin. A G P : ſin. A G I = ſin. A P. ſin. A P G : ſin. A I. ſin. P I G = ſin. A P. ſin. G I : ſin. A I. ſin. P G, ob ſin. A P G : ſin. P I G = ſin. G I : ſin. P G, in triangulo P I G, fiet igitur C G : G g = ſin. A P. ſin. G I : ſin. A I. ſin. P G. Si igitur angulus I P G indigitetur per ψ, arcus vero G P, P I, A I, G I reſpectiue per litteras c, b, a, u et elementum Cycloidis C G per ds, erit primum G g = $d\psi$. ſin. c, hincque

$$ds = d\psi . \frac{\text{ſin. } (a+b) \text{ ſin. } u}{\text{ſin. } a},$$

exiſtente

$$\text{coſ. } u = \text{coſ. } c \text{ coſ. } b + \text{ſin. } c \text{ ſin. } b \text{ coſ. } \psi,$$

ob coſ. G I = coſ. P G. coſ. P I + ſin. P G. ſin. P I. coſ. G P I. Vt formula differentialis propoſita concinnius exprimi queat, ſupponamus ex polo P circuli mobilis demiſſum eſſe arcum P N normalem ad I G, quem per z exprimamus, angulos autem I P N, G P N per ϕ, ϕ' et arcus I N, G N per v, v' indigitemus, ita vt ſit $\psi = \phi + \phi'$ et $v + v' = u$, hincque colligitur

$$\text{ſin. } u = \text{ſin. } v \text{ coſ. } v' + \text{ſin. } v' \text{ coſ. } v = \text{ſin. } v . \frac{\text{coſ. } c}{\text{coſ. } z} + \text{ſin. } v' . \frac{\text{coſ. } b}{\text{coſ. } z},$$

qua-

quare erit

$$d\psi\,\text{ſin.}\,u = (d\phi + d\phi')\,\frac{\text{ſin.}\,v\,\text{coſ.}\,c + \text{ſin.}\,v'\,\text{coſ.}\,b}{\text{coſ.}\,z};$$

porro quia habetur

$$\text{ſin.}\,v = \text{ſin.}\,b\,\text{ſin.}\,\phi \quad\text{et}\quad \text{ſin.}\,v' = \text{ſin.}\,c\,\text{ſin.}\,\phi',$$

haec formula differentialis ſic exprimetur:

$$d\psi\,\text{ſin}\,u = (d\phi + d\phi')\left(\frac{\text{ſin.}\,\phi\,\text{ſin.}\,b\,\text{coſ.}\,c}{\text{coſ.}\,z} + \frac{\text{ſin.}\,\phi'\,\text{ſin.}\,c\,\text{coſ.}\,b}{\text{coſ.}\,z}\right).$$

Tum vero quia eſt

$$\text{Tang.}\,z = \text{Tang.}\,b\,\text{coſ.}\,\phi = \text{Tang.}\,c\,\text{coſ.}\,\phi',$$

fit differentiando

$$-\frac{dz}{\text{coſ.}\,z^2}\,\text{cot.}\,b = d\phi\,\text{ſin.}\,\phi,\quad\text{et}\quad -\frac{dz\,\text{cot.}\,c}{\text{coſ.}\,z^2} = d\phi'\,\text{ſin.}\,\phi',$$

hincque

$$d\phi\,\text{ſin.}\,\phi\left(\frac{\text{ſin.}\,b\,\text{coſ.}\,c}{\text{coſ.}\,z} + \frac{\text{ſin.}\,\phi'}{\text{ſin.}\,\phi}\cdot\frac{\text{ſin.}\,c\,\text{coſ.}\,b}{\text{coſ.}\,z}\right)$$

$$+ d\phi'\,\text{ſin.}\,\phi'\left(\frac{\text{ſin.}\,c\,\text{coſ.}\,b}{\text{coſ.}\,z} + \frac{\text{ſin.}\,\phi}{\text{ſin.}\,\phi'}\cdot\frac{\text{ſin.}\,b\,\text{coſ.}\,c}{\text{coſ.}\,z}\right)$$

$$= -\frac{dz}{\text{coſ.}\,z^3}\left(\text{coſ.}\,b\,\text{coſ.}\,c + \frac{\text{ſin.}\,\phi'}{\text{ſin.}\,\phi}\cdot\frac{\text{ſin.}\,c\,\text{coſ.}\,b^2}{\text{ſin.}\,b}\right)$$

$$-\frac{dz}{\text{coſ.}\,z^3}\left(\text{coſ.}\,c\,\text{coſ.}\,b + \frac{\text{ſin.}\,\phi}{\text{ſin.}\,\phi'}\cdot\frac{\text{ſin.}\,b\,\text{coſ.}\,c^2}{\text{ſin.}\,c}\right).$$

Atqui ob

$$\text{coſ.}\,\phi = \text{tang.}\,z\,\text{cot.}\,b \quad\text{et}\quad \text{coſ.}\,\phi' = \text{tang.}\,z\,\text{cot.}\,c,\ \text{erit}$$

$$\text{ſin.}\,\phi = \sqrt{(1-\text{tang.}\,z^2\,\text{cot.}\,b^2)} = \text{cot.}\,b\,\sqrt{(\text{tang.}\,b^2 - \text{tang.}\,z^2)}\ \text{et}$$

$$\text{ſin.}\,\phi' = \text{cot.}\,c\,\sqrt{(\text{tang.}\,c^2 - \text{tang.}\,z^2)},\ \text{ſiue}$$

$$\text{ſin.}\,\phi = \frac{\text{coſ.}\,b}{\text{coſ.}\,z}\sqrt{(\text{ſin}\,b^2\,\text{coſ.}\,z^2 - \text{ſin}\,z^2\,\text{coſ.}\,b^2)}$$

$$= \frac{\text{coſ.}\,b}{\text{coſ.}\,z}\sqrt{(\text{coſ.}\,z^2 - \text{coſ.}\,b^2)}\ \text{et}$$

$$\text{ſin.}\,\phi' = \frac{\text{coſ.}\,c}{\text{coſ.}\,z}\sqrt{(\text{coſ.}\,z^2 - \text{coſ.}\,c^2)},$$

vnde demum formula differentialis propoſita fiet:

$$d\psi\,\text{ſin.}\,u = -\frac{2\,dz}{\text{coſ.}\,z^3}\,\text{coſ.}\,b\,\text{coſ.}\,c - \frac{dz}{\text{coſ.}\,z^3}\cdot\frac{\text{ſin.}\,c}{\text{ſin.}\,b}\,\text{coſ.}\,c\,\text{coſ.}\,b\,\frac{\sqrt{(\text{coſ.}\,z^2-\text{coſ.}\,c^2)}}{\sqrt{(\text{coſ.}\,z^2-\text{coſ.}\,b^2)}}$$

$$-\frac{dz}{\text{coſ.}\,z^3}\cdot\frac{\text{ſin.}\,b}{\text{ſin.}\,c}\,\text{coſ.}\,c\,\text{coſ.}\,b\,\frac{\sqrt{(\text{coſ.}\,z^2-\text{coſ.}\,b^2)}}{\sqrt{(\text{coſ.}\,z^2-\text{coſ.}\,c^2)}}.$$

Vbi

Vbi quidem primum membrum ratione in §. 5. indicata integratur, bina vero poſteriora membra integrationes difficiliores inuoluunt; nam huiusmodi formulae:

$$\frac{d.z}{coſ.z^2}\sqrt{\left(\frac{coſ.z^2-coſ.b^2}{coſ.z^2+coſ.c^2}\right)},$$

integratio iam quidem rectificationes ſectionum conicarum ſupponit, ideoque formulae iſtius generis

$$\frac{d.z}{coſ.z^3}\sqrt{\left(\frac{coſ.z^2-coſ.b^2}{coſ.z^2-coſ.c^2}\right)}$$

adhuc difficilioris ſunt indaginis.

§. 12. Iam pro inueſtigando Polo V circuli, qui cum elemento curuae G C in G intimum habet contactum, ratiocinium conſimile illi, quo in §. 7. vſi ſumus, adhi-
Fig. 2 et 3. beri poteſt. Breuitatis gratia vero figuris tum adhibitis quoque vtemur, vbi tamen intelligi debet, punctum G non amplius in ipſa peripheria circuli mobilis concipiendum eſſe. Differentiando igitur primum aequationem

$$coſ.\,A\,V = coſ.\,A\,I\,coſ.\,I\,V + ſin.\,A\,I.\,ſin.\,I\,V\,coſ.\,A\,I\,V,$$

ita vt ſolae I V, et A I V variabiles habeantur, fiet:

$$-d.IV.coſ.AI.ſin.IV + d.IV.ſin.AI.coſ.IV.coſ.AIV$$
$$-d.AIV.ſin.AI.ſin.IV.ſin.AIV = 0,$$

hincque ob

$$d.IV = -d.GI = -nm, \text{ et}$$
$$d.AIV = d.GIP = -IGm,$$

prodibit iſta aequatio:

$$+nm.coſ.AI.ſin.IV - nm.ſin.AI.coſ.IV.coſ.AIV$$
$$+IGm.ſin.AI.ſin.IV.ſin.AIV = 0,$$

hinc ob

$$IGm = \frac{In}{ſin.IG} = nm\frac{cot.PIG}{ſin.IG},$$

fiet

ſubſtituendo hunc valorem et diuidendo totam aequationem per $\frac{n\, m}{\text{ſin. } IG}$, fiet

$$+ \text{coſ. } AI.\ \text{ſin. } IV.\ \text{ſin. } IG - \text{ſin. } AI.\ \text{coſ. } IV\ \text{ſin. } IG.\ \text{coſ. } PIG$$
$$+ \text{ſin. } AI.\ \text{ſin. } IV.\ \text{coſ. } PIG = 0,$$

ex quo colligitur:

$$\text{cot. } IV = \frac{\text{coſ. } AI.\ \text{ſin. } IG + \text{ſin. } AI\ \text{coſ. } PIG}{\text{ſin. } AI.\ \text{ſin. } IG.\ \text{coſ. } PIG},$$

quae formula iterum transformari poteſt, introducendo pro coſ. P I G eius valorem $\frac{\text{coſ. } PG - \text{coſ. } PI.\ \text{coſ. } GI}{\text{ſin. } PI.\ \text{ſin. } GI}$, eritque inde

$$\text{cot. } IV = \frac{\text{coſ. } AI\ \text{ſin. } PI\ \text{ſin. } IG^2 + \text{ſin. } AI\ (\text{coſ. } PG - \text{coſ. } PI\ \text{coſ. } GI)}{\text{ſin. } AI.\ \text{ſin. } IG\ (\text{coſ. } IG - \text{coſ. } PI\ \text{coſ. } GI)}.$$

Hic vero ſtatim liquet, poſito P G = P I, fore huius expreſſionis tam numeratorem quam denominatorem per $1 - $ coſ. G I diuiſibilem, fierique tum

$$\text{cot. } IV = \frac{\text{coſ. } AI\ \text{ſin. } IG\ (1 + \text{coſ. } IG) + \text{ſin. } AI\ \text{coſ. } PG}{\text{ſin. } AI.\ \text{ſin. } IG.\ \text{coſ. } PG}$$
$$= \frac{\text{ſin. } AP + \text{coſ. } AI\ \text{ſin. } PG\ \text{coſ. } IG}{\text{ſin. } AI\ \text{ſin. } IG\ \text{coſ. } PG}$$

prorſus vti ſupra inuenimus.

§. 13. Caſu quo ponitur P I = 90°, fiet

$$\text{cot. } IV = \frac{\text{coſ. } AI.\ \text{ſin. } IG^2 + \text{ſin. } AI.\ \text{coſ. } PG}{\text{ſin. } AI.\ \text{ſin. } IG.\ \text{coſ. } PG},$$

ob ſin. P I = 1, et coſ. P I = 0, vnde inſimul poſito P G = 90° deducitur Tang. I V = 0, ideoque ipſum punctum I erit polus circuli, qui cum curua propoſita eandem habet curuaturam. Tum vero ſi ſtatuatur A I = 90°, fiet cot. I V = $\frac{1}{\text{ſin. } IG}$, ſiue Tang. I V = ſin. I G, quae proprietas igitur pro hac ſuppoſitione generaliter locum habet. Denique ſi ſtatuatur P G = 90°, fiet

$$\text{cot. } IV = \frac{\text{coſ. } AI.\ \text{ſin. } PI.\ \text{ſin. } IG^2 - \text{ſin. } AI.\ \text{coſ. } PI.\ \text{coſ. } IG}{-\text{ſin. } AI.\ \text{ſin. } IG.\ \text{coſ. } PI.\ \text{coſ. } IG},$$

 ſiue

$$\text{cot. I V} = \frac{\text{coſ. I G} - \text{cot. A I tang. P I. ſin. I G}^2}{\text{ſin. I G. coſ. I G}} \text{ ſiue}$$

$$= \frac{1}{\text{ſin. I G}} - \text{cot. A I tang. P I tang. I G.}$$

Tab. I Fig. 4. Caeterum generatim quoque hinc colligitur, quaecunque fuerint curuae in ſuperficie ſphaerica deſcriptae, tam illa immobilis T I B, quam iſta S H I, quae ſuper priori rotatur, tum ſimili ratione pro curua rotatione deſcripta M C G, definiri poſſe polum circuli, qui cum elemento G C eandem habet curuaturam. Nam ſi curua S H I tangat ipſam T I B in puncto I, ſintque P et A poli circulorum, qui cum curuis propoſitis in I eandem habent curuaturam, diſtantia I V puncti V, qui eſt polus circuli cum elemento C G eandem curuaturam habentis, definietur per formulam modo propoſitam:

$$\text{cot. I V} = \frac{\text{coſ. A I. ſin. P I. ſin. I G}^2 + \text{ſin. A I (coſ. P G} - \text{coſ. P I. coſ. G I)}}{\text{ſin. A I. ſin. I G (coſ. P G} - \text{coſ. P I. coſ. I G)}}.$$

§. 14. Nunc demum pro inuenienda quadratura

Fig. 3. ſpatii, quod comprehenditur inter curuam M C G, circulum T I et arcus circulorum maximorum G I, et ſimilem G I pro initio rotationis, ſequenti ratiocinio vtemur. Primum modo conſimili, illi in §. 8 adhibiti, elementum huius ſpatii H G I i fiet

$$= \text{I G } m. \frac{\text{ſin. G I}}{\text{ſin. I V}} (\text{coſ. I V} - \text{coſ. G V}) \frac{S}{360^\circ}.$$

Tum vero eſt I G $m = - d.$ P I G, ex quo fiet elementum

Fig. 4. iſtud:

$$- d.\text{ P I G. ſin. I G (cot. G V (1} - \text{coſ. I G)} + \text{ſin. I G)} \frac{S}{360^\circ}.$$

Iam igitur ſi angulus P I G indicetur littera Φ, arcus vero I G, A I reſpectiue per u, a indigitentur, erit per §. praeced.

$$\text{cot. I V} = \frac{\text{coſ. } a \text{ ſin. } u + \text{ſin. } a \text{ coſ. } \Phi}{\text{ſin. } a \text{ ſin. } u \text{ coſ. } \Phi},$$

hoc-

hocque valore introducto fiet elementum commemoratum, ſepoſito factore $\frac{S}{360^0}$,

$$-\frac{d\,\Phi}{\text{ſin.}\,a\,\text{coſ.}\,\Phi}\Big((\text{coſ.}\,a\,\text{ſin.}\,u+\text{ſin.}\,a\,\text{coſ.}\,\Phi)(1-\text{coſ.}\,u)$$
$$+\,\text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,u^2\,\text{coſ.}\,\Phi\Big),$$
$$=-\frac{d\,\Phi\,(1-\text{coſ.}\,\Phi)}{\text{ſin.}\,a\,\text{coſ.}\,\Phi}\big(\text{coſ}\,a\,\text{ſin.}\,u+\text{ſin.}\,a\,\text{coſ.}\,\Phi\,(2+\text{coſ.}\,u)\big),$$
$$\text{ob}\ \text{ſin.}\,u^2=(1-\text{coſ.}\,u)(1+\text{coſ.}\,u).$$

Vltima vero iſta expreſſio concinniorem hanc nanciſcitur formam:

$$-d\,\Phi\frac{\text{ſin.}\,u\,\text{coſ.}\,a}{\text{ſin.}\,a\,\text{coſ.}\,\Phi}(1-\text{coſ.}\,u)-d\,\Phi\,(1-\text{coſ.}\,u)(2+\text{coſ.}\,u).$$

Iam pro hac formula differentiali integranda ſiue u, ſiue Φ, ex calculo elidi poſſent ope aequationis

$$\text{coſ.}\,c=\text{coſ.}\,b\,\text{coſ.}\,u+\text{ſin.}\,b\,\text{ſin.}\,u\,\text{coſ.}\,\Phi;$$

verum ſic irrationalia vix ac ne vix quidem euitari poterunt, igitur aliam viam tentabimus, introducendo in calculum angulum GPI $=\psi$. Quum igitur ſit,

$$-d\,PIG : d.\,GPI=\text{ſin}\ PG.\ \text{coſ.}\ PGI : \text{ſin.}\ GI,$$

tumque habeatur

$$\text{coſ.}\ PGI=\frac{\text{coſ.}\,PI-\text{coſ.}\,PG\,\text{coſ.}\,GI}{\text{ſin.}\,PG\,\text{ſin.}\,GI},\ \text{fiet}$$
$$-d.\,PIG.\,\text{ſin.}\,GI^2=d.\,GPI\,(\text{coſ.}\,PI-\text{coſ.}\,PG.\,\text{coſ.}\,GI),$$

ſiue

$$-d\,\Phi\,\text{ſin.}\,u^2=d\,\psi\,(\text{coſ.}\,b-\text{coſ.}\,c\,\text{coſ.}\,u);$$

praeterea vero eſt,

$$\text{coſ.}\,\Phi=\frac{\text{coſ.}\,c-\text{coſ.}\,b\,\text{coſ.}\,u}{\text{ſin.}\,b\,\text{ſin.}\,u},\ \text{hinc}$$
$$d\,\Phi\frac{\text{ſin.}\,u\,\text{coſ.}\,a}{\text{ſin.}\,a\,\text{coſ.}\,\Phi}(1-\text{coſ.}\,u)=d\,\Phi\frac{\text{ſin.}\,u^2\,\text{coſ.}\,a\,\text{ſin.}\,b\,(1-\text{coſ.}\,u)}{\text{ſin.}\,a\,(\text{coſ.}\,c-\text{coſ.}\,b\,\text{coſ.}\,u)}$$
$$=-d.\,\psi\frac{\text{cot.}\,a\,\text{ſin.}\,b\,(1-\text{coſ.}\,u)(\text{coſ.}\,b-\text{coſ.}\,c\,\text{coſ.}\,u)}{\text{coſ.}\,c-\text{coſ.}\,b\,\text{coſ.}\,u},\ \text{ideoque}$$
$$-d\,\Phi\frac{\text{ſin.}\,u\,\text{cot.}\,a}{\text{coſ.}\,\Phi}(1-\text{coſ.}\,u)-d\,\Phi\,(1-\text{coſ.}\,u)-d\,\Phi\,\text{ſin.}\,u^2$$

$=d\,\Phi$

$$= d\psi \text{ cot. } a \text{ ſin. } b \frac{(1 - \text{coſ. } u)(\text{coſ. } b - \text{coſ. } c \text{ coſ. } u)}{\text{coſ. } c - \text{coſ. } b \text{ coſ. } u}$$

$$+ d\psi (\text{coſ. } b - \text{coſ. } c \text{ coſ. } u) - d\Phi (1 - \text{coſ. } u).$$

§. 15. Heic vero bina priora membra facile per ſolam variabilem ψ exprimuntur, ob

$$\text{coſ. } u = \text{coſ. } b \text{ coſ. } c + \text{ſin. } b \text{ ſin. } c \text{ coſ. } \psi,$$

et leui adhibita attentione liquet, expreſſionem

$$d\psi \frac{(1 - \text{coſ. } u)(\text{coſ. } b - \text{coſ. } c \text{ coſ. } u)}{\text{coſ. } c - \text{coſ. } b \text{ coſ. } u}$$

ad huiusmodi formam:

$$d\psi \left(\alpha + \beta \text{ coſ. } u + \frac{\delta}{\text{coſ. } c - \text{coſ. } b \text{ coſ. } u}\right)$$

reduci poſſe, eritque

$$\beta = -\frac{\text{coſ. } c}{\text{coſ. } b}, \quad \alpha = 1 + \frac{\text{coſ. } c}{\text{coſ. } b} - \frac{\text{coſ. } c^2}{\text{coſ. } b^2} \text{ et denique}$$

$$\delta = \text{coſ. } b \left(1 - \frac{\text{coſ. } c}{\text{coſ. } b} - \frac{\text{coſ. } c^2}{\text{coſ. } b^2} - \frac{\text{coſ. } c^3}{\text{coſ. } b^3}\right);$$

praeterea vero eſt

$$\text{coſ. } b - \text{coſ. } c \text{ coſ. } u = \text{coſ. } b \text{ ſin. } c^2 - \text{ſin. } b \text{ ſin. } c \text{ coſ. } c \text{ coſ. } \psi$$

$$= \text{ſin. } c (\text{ſin. } c \text{ coſ. } b - \text{ſin. } b \text{ coſ. } c \text{ coſ. } \psi) \text{ et}$$

$$\text{coſ. } c - \text{coſ. } b \text{ coſ. } u = \text{ſin. } b (\text{ſin. } b \text{ coſ. } c - \text{ſin. } c \text{ coſ. } b \text{ coſ. } \psi).$$

Ex formula igitur propoſita conſequemur primum quantitates ſola $d\psi$ affectas, quae ſunt:

$$d\psi \text{ cot. } a \text{ ſin. } b \left(1 + \frac{\text{coſ. } c}{\text{coſ. } b} - \frac{\text{coſ. } c^2}{\text{coſ. } b^2}\right)$$

$$- d\psi \text{ cot. } a \text{ ſin. } b \text{ coſ. } c^2 + d\psi \text{ coſ. } b \text{ ſin. } c^2,$$

deinde occurrent expreſſiones factore $d\psi$ coſ. ψ affectae, quae ſunt:

$$- d\psi \text{ coſ. } \psi . \frac{\text{cot. } a}{\text{coſ. } b} \text{ ſin. } b^2 \text{ ſin. } c \text{ coſ. } c - d\psi \text{ coſ. } \psi \text{ ſin. } b \text{ ſin. } c \text{ coſ. } c$$

$$= - d\psi \text{ coſ. } \psi \frac{\text{ſin. } (a + b) \text{ ſin. } b \text{ ſin. } c \text{ coſ. } c}{\text{ſin. } a \text{ coſ. } b},$$

denique aderit quoque expreſſio:

$$\frac{\delta \, d\psi \text{ cot. } a}{\text{ſin. } b \text{ coſ. } c - \text{ſin. } c \text{ coſ. } b \text{ coſ. } \psi}.$$

Inte-

Integratio priorum expreſſionum per ſe eſt manifeſta, pro vltima vero notetur eſſe

$$\int \frac{d\,\psi}{1 - n\,coſ.\,\psi} = \frac{1}{\sqrt{(1 - nn)}}\ \text{arc. coſ.} \left(\frac{coſ.\,\psi - n}{1 - n\,coſ.\,\psi}\right),$$

ideoque pro caſu praeſenti, vbi $n = \text{tang.}\,c\ \text{cot.}\,b$, fiet

$$\int \frac{d\,\psi}{1 - tang.\,c\ cot.\,b\ coſ.\,\psi} = \frac{tang.\,b}{\sqrt{(tang.\,b^2 - tang.\,c^2)}}\ \text{arc coſ.} \left(\frac{coſ.\,\psi\ tang.\,b - tang.\,c}{tang.\,b - tang.\,c\ coſ.\,\psi}\right).$$

Iam vero notetur, expreſſionem

$$\frac{coſ.\,\psi\ tang.\,b - tang.\,c}{tang.\,b - tang.\,c\ coſ.\,\psi} = -\frac{(ſin.\,c\ coſ.\,b - coſ.\,c\ ſin.\,b\ coſ.\,\psi)}{ſin.\,b\ coſ.\,c - ſin.\,b\ coſ.\,c\ coſ.\,\psi},$$

ſub forma valde concinna repraeſentari poſſe; nam ſi angulus PGI exprimatur per q, erit per proprietates triangulorum ſphaericorum: Tab. I. Fig. 4.

$$\text{cot.}\,\Phi = \frac{coſ.\,c\ ſin.\,b - ſin.\,c\ coſ.\,b\ coſ.\,\psi}{ſin.\,c\ ſin.\,\psi}\ \text{et cot.}\,\eta = \frac{coſ.\,b\ ſin.\,c - coſ.\,c\ ſin.\,b\ coſ.\,\psi}{ſin.\,b\ ſin.\,\psi},$$

hincque fractio propoſita $= -\frac{cot.\,\eta\ ſin.\,b}{cot.\,\Phi\ ſin.\,c}$, atque ſin. b: ſin. c $=$ ſin. η: ſin. Φ, vnde iſta fractio erit $= -\frac{coſ.\,\eta}{coſ.\,\Phi}$. Quotiescunque igitur fuerit coſ. $\eta <$ coſ. Φ, problematis ſolutio erit in poteſtate, id quod eueniet dum tang. $b >$ tang. c.

§. 16. Pro caſu vero vbi $n > 1$, ſiue tang. $b <$ tang. c, poſito $z = \frac{coſ.\,\psi - n}{1 - n\,coſ.\,\psi}$, fiet

$$d\,z = + \frac{d\,\psi\ ſin.\,\psi\,(n^2 - 1)}{(1 - n\,coſ.\,\psi)^2},\ \sqrt{(z^2 - 1)} = \frac{ſin.\,\psi\,\sqrt{(n^2 - 1)}}{1 - n\,coſ.\,\psi},$$

ideoque

$$\frac{d\,z}{\sqrt{(zz - 1)}} = \frac{d\,\psi\,\sqrt{(n^2 - 1)}}{1 - n\,coſ.\,\psi},\ \text{hincque}$$

$$\frac{d\,\psi}{1 - n\,coſ.\,\psi} = \frac{d\,z}{\sqrt{(n^2 - 1)(z^2 - 1)}};\ \text{eſt vero}$$

$$\int \frac{d\,z}{\sqrt{(z^2 - 1)}} = l\,(z + \sqrt{(z^2 - 1)}),$$

ideoque fiet

$$\int \frac{d\,\psi}{1 - n\,coſ.\,\psi} = \frac{1}{\sqrt{(n^2 - 1)}}\, l \left(\frac{coſ.\,\psi - n + ſin.\,\psi\,\sqrt{(n^2 - 1)}}{1 - n\,coſ.\,\psi}\right).$$

Iam vero etiam reſtat vt explicemus, quid per

Tab. I. Fig. 6. $\int d\Phi(1-\text{coſ.}\,u)$ exprimatur. Sit igitur P Polus circuli mobilis S G U, et initio rotationis ſupponamus punctum G fuiſſe in U, tumque ducantur arcus circulorum maximorum P G, P I, G I, vbi igitur G I erit $=u$ et ang. P I G $=\Phi$, hincque facile colligitur, elementum $d\Phi(1-\text{coſ.}\,u)\frac{S}{360^\circ}$ eſſe elementum pro ſpatiis L U I L + G M L m, quae concluduntur arcu arculi mobilis G M L U, et arcubus circulorum maximorum G I, P I. Si in ſuperioribus expreſſionibus ponatur coſ. $b=$ coſ. c, hoc eſt punctum G cum H coincidere, fiet noſtra expreſſio pro quadratura Fig. 4.

$$=d\psi(1-\text{coſ.}\,u)(\text{cot.}\,a\,\text{ſin.}\,b+\text{coſ.}\,b)-d\Phi(1-\text{coſ.}\,u)$$
$$=d\psi(1-\text{coſ.}\,u)\frac{\text{ſin.}\,(a+b)}{\text{ſin.}\,a}-d\Phi(1-\text{coſ.}\,u,$$

prorſus vti ſupra §. 8 inuenimus, nam quod ibi erat Φ iam eſt $90^\circ-\Phi$, tumque loco ψ, 2ψ adhibuimus. Vlterius ſi ponatur coſ. $b=0$ ob $b=90^\circ$, expreſſio iſta §. 14 tradita fiet:

$$-d\psi\,\text{cot.}\,a(1-\text{coſ.}\,u)\,\text{coſ.}\,u-d\psi\,\text{coſ.}\,c\,\text{coſ.}\,u-d\Phi(1-\text{coſ.}\,u),$$

vbi inſuper coſ. $u=$ ſin. c coſ. ψ, cuius integratio eſt manifeſta. At caſu, quo ſimul coſ. $c=0$, formula iſta in hanc abibit:

$$d\psi\,\text{cot.}\,a\,(1-\text{coſ.}\,u)=d\psi\,\text{cot.}\,a\,(1-\text{coſ.}\,\psi),\ \text{ob}$$
$$\text{coſ.}\,b-\text{coſ.}\,c\,\text{coſ.}\,u=\text{coſ.}\,c-\text{coſ.}\,b\,\text{coſ}\,u$$

atque angulum Φ. hoc caſu $=90^\circ$, vnde $d\Phi=0$. Deinde poſito $a=90^\circ$, expreſſio iſta euadet:

$$d\psi\,(\text{coſ.}\,b-\text{coſ.}\,c\,\text{coſ.}\,u)-d\Phi\,(1-\text{coſ.}\,u)$$
$$=d\psi\,\text{ſin.}\,c\,(\text{coſ.}\,b\,\text{ſin.}\,c-\text{coſ.}\,c\,\text{ſin.}\,b\,\text{coſ.}\,\psi)$$
$$-d\Phi\,(1-\text{coſ.}\,u).$$

Denique, poſito $c=90^\circ$, ſiue coſ. $c=0$, fiet expreſſio comme-

commemorata

$$-d\psi\,\frac{\mathrm{cot.}\,a\,\mathrm{ſin.}\,b}{\mathrm{coſ.}\,u}(1-\mathrm{coſ.}\,u)+d\psi\,\mathrm{coſ.}\,b-d\Phi(1-\mathrm{coſ.}\,u),$$

exiſtente $\mathrm{coſ.}\,u=\mathrm{ſin.}\,c\,\mathrm{coſ.}\,\psi$, hincque pro hoc caſu integrale Logarithmos inuoluet.

§. 17. Iam autem ſi ponatur $c=0$, hoc eſt, punctum deſcribens ſemper cum centro circuli mobilis coincidere, ſolutiones ſupra allatae adhiberi non poſſunt, etiamſi curua deſcripta iam ſit ſimpliciſſima, quippe quae eſt circulus, polo A, interuallo A P deſcriptus. Sic pro formula elementum curuae exhibente §. 11, patet illam hoc caſu locum non habere, ob angulum ψ euaneſcentem, ideoque $d\psi=0$. Neque formula §. 12 allata pro interuallo circuli oſculatoris locum habere poteſt, nam poſito $\mathrm{coſ.}\,PIG=1$, fieret

$$\mathrm{cot.}\,IV=\frac{\mathrm{coſ.}\,AI\,\mathrm{ſin.}\,IG+\mathrm{ſin.}\,AI}{\mathrm{ſin.}\,AI\,\mathrm{ſin.}\,IG}=\mathrm{coſ.}\,AI+\frac{1}{\mathrm{ſin.}\,IG},$$

quae tamen manifeſto eſt $=\mathrm{cot.}\,AI$.

TRIGO-

TRIGONOMETRIA SPHAERICA VNIVERSA, EX PRIMIS PRINCIPIIS BREVITER ET DILVCIDE DERIVATA.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Tab. I. Fig. 7. Propoſitum ſit triangulum ſphaericum quodcunque, cuius anguli litteris maiuſculis A, B, C, latera autem minuſculis *a*, *b*, *c*, in figura adſcriptis, deſignentur, ita vt iisdem litteris maiuſculis eaedem minuſculae opponantur. Iam ex centro Sphaerae, cui literam O tribuamus, per ſingulos angulos educantur rectae O C, O *a*, O *b*, quae in centro O angulum ſolidum conſtituent, cuius anguli plani metientur latera trianguli, eorum autem inclinationes mutuae angulos trianguli.

Fig. 8. §. 2. His praemiſſis capiatur O C ipſi radio Sphaerae aequalis $= 1$, vnde ad O C in vtroque plano C O *a* et C O *b* normaliter ſtatuantur rectae C *a* et C *b*; tum vero ex *b* ad C *a* demittatur perpendiculum *b p*, quod ſimul ad

ad planum C O a erit normale; praeterea vero ex p ad O a normalis ducatur $p\,q$, ſicque, ducta $b\,q$, ea etiam ad O a erit normalis. Hoc modo tota figura, qua indigemus, erit conſtructa.

§. 3. Cum iam ſit angulus C O a lateri b aequalis, erit

$$C\,a = \text{tang.}\,b \text{ et } O\,a = \text{ſec.}\,b = \frac{1}{\text{coſ.}\,b}.$$

Simili modo, ob angulum C O $b = a$, erit

$$C\,b = \text{tang.}\,a \text{ et } O\,b = \text{ſec.}\,a = \frac{1}{\text{coſ.}\,a}.$$

Porro autem, cum ſit angulus

$$a\,O\,b = c \text{ et } O\,b = \frac{1}{\text{coſ.}\,a} \text{ erit}$$

$$b\,q = \frac{\text{ſin.}\,c}{\text{coſ.}\,a} \text{ et } O\,q = \frac{\text{coſ.}\,c}{\text{coſ.}\,a}.$$

Hinc pro reliquis figurae lineis exprimendis, ob angulum

$$a\,C\,b = C, \text{ erit } b\,p = C\,b\,\text{ſin.}\,C = \text{tang.}\,a\,\text{ſin.}\,C \text{ et}$$

$$C\,p = C\,b\,\text{coſ.}\,C = \text{tang.}\,a\,\text{coſ.}\,C,$$

vnde porro colligitur

$$a\,p = C\,a - C\,p = \text{tang.}\,b - \text{tang.}\,a\,\text{coſ.}\,C,$$

et quia angulus C a O $= 90° - b$, habebitur,

$$p\,q = a\,p\,\text{coſ}\,b = \text{ſin.}\,b - \text{tang.}\,a\,\text{coſ.}\,b\,\text{coſ.}\,C \text{ et}$$

$$a\,q = a\,p\,\text{ſin.}\,b = \frac{\text{ſin.}\,b^2}{\text{coſ.}\,b} - \text{tang.}\,a\,\text{ſin.}\,b\,\text{coſ.}\,C.$$

Quare, cum inuenerimus O $q = \frac{\text{coſ.}\,c}{\text{coſ.}\,a}$, fiet

$$O\,a = \frac{1}{\text{coſ.}\,b} = \frac{\text{coſ.}\,c}{\text{coſ.}\,a} + \frac{\text{ſin.}\,b^2}{\text{coſ.}\,b} - \text{tang.}\,a\,\text{ſin.}\,b\,\text{coſ.}\,C,$$

ſicque erit

$$\frac{\text{coſ.}\,c}{\text{coſ.}\,a} = \text{coſ.}\,b + \text{tang.}\,a\,\text{ſin.}\,b\,\text{coſ.}\,C, \text{ ſiue}$$

$$\text{coſ.}\,c = \text{coſ.}\,a\,\text{coſ.}\,b + \text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,b\,\text{coſ.}\,C$$

§. 4. Cum iam angulus $b\,q\,p$ praebeat inclinationem plani $a\,O\,b$ ad $a\,O\,C$, erit iſte angulus $b\,q\,p = A$, vnde ex triangulo $b\,p\,q$ primo habebitur

$$\text{ſin } A = \frac{b\,p}{b\,q} = \frac{\text{ſin. } a \text{ ſin. } C}{\text{ſin. } c}, \text{ ſiue } \frac{\text{ſin. } C}{\text{ſin. } c} = \frac{\text{ſin. } A}{\text{ſin. } a};$$

vnde iam ſequitur, ſinus angulorum noſtri trianguli proportionales eſſe ſinubus laterum oppoſitorum. Deinde aequatio

$$\text{coſ. } A = \frac{p\,q}{b\,q} = \frac{\text{coſ. } a \text{ ſin. } b - \text{ſin. } a \text{ coſ. } b \text{ coſ. } C}{\text{ſin. } c},$$

cum binis praecedentibus coniuncta totam Doctrinam ſphaericam complectitur, quod autem vberiorem explicationem poſtulat, vnde ſingulas has tres aequationes magis euoluamus.

Euolutio primae formulae.

$$\frac{\text{ſin. } C}{\text{ſin. } c} = \frac{\text{ſin. } A}{\text{ſin. } a}.$$

§. 5. Cum tam litteras maiuſculas A, B, C, quam minuſculas a, b, c, inter ſe permutare liceat, ſi modo iisdem litteris maiuſculis eaedem minuſculae oppoſitae relinquantur, erit etiam $\frac{\text{ſin. } C}{\text{ſin. } c} = \frac{\text{ſin. } B}{\text{ſin. } b}$, ſicque prodibit haec tergemina aequatio:

$$\frac{\text{ſin. } A}{\text{ſin. } B} = \frac{\text{ſin. } B}{\text{ſin. } b} = \frac{\text{ſin. } C}{\text{ſin. } c}.$$

Deinde etiam notaſſe iuuabit ſequentes aequalitates:

$$\text{ſin. } A \text{ ſin. } b = \text{ſin. } B \text{ ſin. } a$$

$$\text{ſin. } A \text{ ſin. } c = \text{ſin. } C \text{ ſin. } a$$

$$\text{ſin. } B \text{ ſin. } c = \text{ſin. } C \text{ ſin. } b.$$

Euolu-

Euolutio formulae.

$$\text{coſ. } A \text{ ſin. } c = \text{coſ. } a \text{ ſin. } b - \text{ſin. } a \text{ coſ. } b \text{ coſ. } C$$

§. 6. Quia ſin. A ſin. c = ſin. C ſin. a, diuidatur huius aequationis membrum prius per ſin. A ſin. c, poſterius vero per ſin. C ſin. a, atque obtinebitur

$$\text{cot. } A = \frac{\text{coſ. } a \text{ ſin. } b - \text{ſin. } a \text{ coſ. } b \text{ coſ. } C}{\text{ſin. } a \text{ ſin. } C},$$

vnde iam ex datis binis lateribus a et b, cum angulo intercepto C, angulus A reperiri poteſt; ſimilique modo ex iisdem datis colligetur angulus B per hanc formulam, ex illa, literas A, B, a, b permutando, deriuatam:

$$\text{cot. } B = \frac{\text{coſ. } b \text{. ſin. } a - \text{coſ. } a \text{ ſin. } b \text{ coſ. } C}{\text{ſin. } b \text{. ſin. } C}.$$

§. 7. Si porro eiusdem, quam hic conſideramus, formulae primum terminum per $\frac{\text{ſin. } C}{\text{ſin. } c}$, ſecundum per $\frac{\text{ſin. } B}{\text{ſin. } b}$, tertium vero per $\frac{\text{ſin. } A}{\text{ſin. } a}$ multiplicemus, orietur iſta aequatio memorabilis:

$$\text{coſ. } A \text{ ſin. } C = \text{coſ. } a \text{ ſin. } B - \text{coſ. } b \text{ ſin. } A \text{ coſ. } C,$$

$$\text{coſ. } a = \frac{\text{coſ. } A \text{ ſin. } C + \text{ſin. } A \text{ coſ. } C \text{ coſ. } b}{\text{ſin. } B} \quad \text{et}$$

litteris B et C, item b et c inter ſe permutandis erit

$$\text{coſ. } a = \frac{\text{coſ. } A \text{ ſin. } B + \text{ſin. } A \text{ coſ. } B \text{ coſ. } c}{\text{ſin. } C}, \text{ ſiue}$$

$$\text{coſ. } a \text{ ſin. } C = \text{coſ. } A \text{ ſin. } B + \text{ſin. } A \text{ coſ. } B \text{ coſ. } c$$

quae a propoſita aliter non diſcrepat, niſi quod literae maiusculae et minusculae inter ſe permutentur, inſuper vero omnes coſinus negatiue accipiantur.

§. 8. Quod ſi iam huius poſtremae aequationis primum membrum per ſin. a ſin. C, poſterius per ſin. A ſin. c

 diui-

diuidamus, orietur hacc aequatio:

$$\text{cot. } a = \frac{\text{coſ. A ſin. B} + \text{ſin. A coſ. B coſ. } c}{\text{ſin. A ſin. } c},$$

quae inſeruit lateri a inueniendo, ex datis duobus angulis A, B, cum latere intercepto c; tum vero ex iisdem datis etiam latus b definietur hac aequatione:

$$\text{cot. } b = \frac{\text{coſ. B ſin. A} + \text{ſin. B. coſ. A coſ. } c}{\text{ſin. B ſin. } c}.$$

§. 9. Praeterea vero ex eadem formula propoſita caſus alias difficillimus, quo ex datis tribus angulis latera poſtulantur, eruitur. Cum enim ſit

$$\text{coſ. A ſin. } c = \text{coſ. } a \text{ ſin. } b - \text{ſin. } a \text{ coſ. } b \text{ coſ. C},$$

erit ſimili modo, literis A et B permutatis,

$$\text{coſ. B ſin. } c = \text{coſ. } b \text{ ſin. } a - \text{ſin. } b \text{ coſ. } a \text{ coſ. C}.$$

Si poſterior, ducta in coſ. C, ad priorem addatur, prodibit iſta aequatio:

$$\text{ſin. } c \text{ (coſ. A} + \text{coſ. B coſ. C)} = \text{coſ. } a \text{ ſin. } b \text{ ſin. C}^2;$$

at vero ob ſin. b ſin. C $=$ ſin. B ſin. c, aequatio illa induet hanc formam:

$$\text{coſ. A} + \text{coſ. B coſ. C} = \text{coſ. } a \text{ ſin. B ſin. C};$$

ſiue

$$\text{coſ. A} = - \text{coſ. B coſ. C} + \text{ſin. C coſ. } a.$$

Permutatis igitur literis A et C, manente B, fiet

$$\text{coſ. C} = - \text{coſ. B coſ. A} + \text{ſin. B ſin. A coſ. } c,$$

quae ex noſtra tertia formula:

$$\text{coſ. } c = \text{coſ. } a \text{ coſ. } b - \text{ſin. } a \text{ ſin. } b \text{ coſ. C}$$

naſcitur, ſi litterae maiuſculae et minuſculae inter ſe permutentur, omnes autem coſinus negatiue accipiantur.

Euolu-

Euolutio formulae.

$$\text{coſ.}\, c = \text{coſ.}\, a\, \text{coſ.}\, b + \text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, b\, \text{coſ.}\, C.$$

§. 10. Hic ſtatim euidens eſt, hanc formulam duplicem vſum praeſtare, alterum, quo ex datis lateribus *a*, *b*, *c* anguli ſunt definiendi, quod fit ope huius formulae

$$\text{coſ.}\, C = \frac{\text{coſ.}\, c - \text{coſ.}\, a\, \text{coſ.}\, b}{\text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, b};$$

alterum vero, quando ex binis lateribus *a* et *b*, cum angulo intercepto C, tertium latus *c* quaeritur, quod fit ope huius formulae:

$$\text{coſ.}\, c = \text{coſ.}\, a\, \text{coſ.}\, b + \text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, b\, \text{coſ.}\, C.$$

§. 11. Nunc igitur hunc vſum etiam ad angulos transferre poterimus, quoniam modo inuenimus

$$\text{coſ.}\, C = -\text{coſ.}\, A\, \text{coſ.}\, B + \text{ſin.}\, A\, \text{ſin.}\, B\, \text{coſ.}\, c.$$

Hinc enim ſtatim, ſi dentur duo anguli A, B, cum latere intercepto *c* determinatur tertius angulus C. Deinde vero, ſi dentur omnes tres anguli trianguli ſphaerici, quodvis latus, veluti *c*, hoc modo definitur:

$$\text{coſ.}\, c = \frac{\text{coſ.}\, C + \text{coſ.}\, A\, \text{coſ.}\, B}{\text{ſin.}\, A\, \text{ſin.}\, B}.$$

§. 12. Cum igitur tota Trigonometria Sphaerica tribus aequationibus ſupra inuentis innitatur, permutatio angulorum et laterum generaliter locum habet, ſi modo omnes coſinus negatiue accipiantur. In prima enim formula:

$$\frac{\text{ſin.}\, C}{\text{ſin.}\, c} = \frac{\text{ſin.}\, B}{\text{ſin.}\, b} = \frac{\text{ſin.}\, A}{\text{ſin.}\, a},$$

haec permutabilitas per ſe eſt manifeſta, quia nulli coſinus occurrunt, deinde iſta permutabilitas pro ambabus reliquis formulis iam eſt euicta, vnde ſequens Theorema inſigne naſcitur:

Theorema.

Propoſito quocunque triangulo ſphaerico, cuius anguli ſint A, B, C, *et latera* a, b, c, *ſemper aliud triangulum analogum exhiberi poteſt, cuius anguli ſint complementa laterum illius ad duos rectos, latera vero complementa angulorum ad duos rectos.* Hoc enim modo omnes ſinus manent iidem, omnes vero coſinus euadunt negatiui, ideoque etiam tangentes et cotangentes. Conſtat autem tale triangulum formari ex Polis trium laterum trianguli propoſiti.

§. 13. Ad vſum ergo practicum omnia praecepta ſub quatuor formis repraeſentari poſſunt, quarum binae adeo ita arcte colligantur, vt altera ex altera formetur, dum litterae maiusculae et minusculae inter ſe permutantur, coſinibus negatiue ſumtis, ita vt ſufficiat duas tantum formas memoriae mandaſſe. Has igitur quatuor formas cum omnibus variationibus, quas tranſpoſitione litterarum recipere poſſunt, ante oculos exponamus.

Forma prima.

§ 14. Haec forma duos inuoluit caſus, quorum altero ex datis tribus lateribus quidam angulus, altero vero

vero ex datis duobus lateribus, cum angulo intercepto, tertium latus inuenitur:

$\text{coſ.}\,A = \frac{\text{coſ.}\,a - \text{coſ.}\,b\,\text{coſ.}\,c}{\text{ſin.}\,b\,\text{ſin.}\,c}$	$\text{coſ.}\,a = \text{coſ.}\,b\,\text{coſ.}\,c + \text{ſin.}\,b\,\text{ſin.}\,c\,\text{coſ.}\,A.$
$\text{coſ.}\,B = \frac{\text{coſ.}\,b - \text{coſ.}\,a\,\text{coſ.}\,c}{\text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,c}$	$\text{coſ.}\,b = \text{coſ.}\,a\,\text{coſ.}\,c + \text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,c\,\text{coſ.}\,B$
$\text{coſ.}\,C = \frac{\text{coſ.}\,c - \text{coſ.}\,a\,\text{coſ.}\,b}{\text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,b}$	$\text{coſ.}\,c = \text{coſ.}\,a\,\text{coſ.}\,b + \text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,b\,\text{coſ.}\,C.$

Forma ſecunda.

§. 15. Haec forma etiam duos caſus continet, quorum altero ex datis tribus angulis aliquod latus, altero vero ex datis duobus angulis, cum latere intercepto, tertius angulus quaeritur:

$\text{coſ.}\,a = \frac{\text{coſ.}\,A + \text{coſ.}\,B\,\text{coſ.}\,C}{\text{ſin.}\,B\,\text{ſin.}\,C}$	$\text{coſ.}\,A = -\text{coſ.}\,B\,\text{coſ.}\,C + \text{ſin.}\,B\,\text{ſin.}\,C\,\text{coſ}\,a$
$\text{coſ.}\,b = \frac{\text{coſ.}\,B + \text{coſ.}\,A\,\text{coſ.}\,C}{\text{ſin.}\,A\,\text{ſin.}\,C}$	$\text{coſ.}\,B = -\text{coſ.}\,A\,\text{coſ.}\,C + \text{ſin.}\,A\,\text{ſin.}\,C\,\text{coſ.}\,b$
$\text{coſ.}\,c = \frac{\text{coſ.}\,C + \text{coſ.}\,A\,\text{coſ.}\,B}{\text{ſin.}\,A\,\text{ſin.}\,B}$	$\text{coſ.}\,C = -\text{coſ.}\,A\,\text{coſ.}\,B + \text{ſin.}\,A\,\text{ſin.}\,B\,\text{coſ.}\,c.$

Forma tertia.

§. 16. Haec forma eum caſum complectitur, quo ex duobus lateribus, cum angulo intercepto, duo reliqui anguli determinantur, quae formulae cum ſuis variationibus ita ſe habebunt:

$\text{cot.}\,A = \frac{\text{coſ.}\,a\,\text{ſin.}\,b - \text{ſin.}\,a\,\text{coſ.}\,b\,\text{coſ.}\,C}{\text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,C}$	$\text{cot.}\,B = \frac{\text{ſin.}\,a\,\text{coſ.}\,b - \text{coſ.}\,a\,\text{ſin.}\,b\,\text{coſ.}\,C}{\text{ſin.}\,b\,\text{ſin.}\,C}$
$\text{cot.}\,B = \frac{\text{coſ.}\,b\,\text{ſin.}\,c - \text{ſin.}\,b\,\text{coſ.}\,c\,\text{coſ.}\,A}{\text{ſin.}\,b\,\text{ſin.}\,A}$	$\text{cot.}\,C = \frac{\text{ſin.}\,b\,\text{coſ.}\,c - \text{coſ.}\,b\,\text{ſin.}\,c\,\text{coſ.}\,A}{\text{ſin.}\,c\,\text{ſin.}\,A}$
$\text{cot.}\,C = \frac{\text{coſ.}\,c\,\text{ſin.}\,a - \text{ſin.}\,c\,\text{coſ.}\,a\,\text{coſ.}\,B}{\text{ſin.}\,c\,\text{ſin.}\,B}$	$\text{cot.}\,A = \frac{\text{ſin.}\,c\,\text{coſ.}\,a - \text{coſ.}\,c\,\text{ſin.}\,a\,\text{coſ.}\,B}{\text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,B}$

Forma

Forma quarta.

§. 17. Haec forma reſpicit caſum, quo ex duobus angulis, cum latere intercepto, bina reliqua latera definiuntur, quae formulae cum variationibus ita ſe habent:

$$\text{cot.}\,a = \frac{\text{coſ.}\,A\,\text{ſin.}\,B + \text{ſin.}\,A\,\text{coſ.}\,B\,\text{coſ.}\,c}{\text{ſin.}\,A\,\text{ſin.}\,c} \qquad \text{cot.}\,b = \frac{\text{ſin.}\,A\,\text{coſ.}\,B + \text{coſ.}\,A\,\text{ſin.}\,B\,\text{coſ.}\,c}{\text{ſin.}\,B\,\text{ſin.}\,c}$$

$$\text{cot.}\,b = \frac{\text{coſ.}\,B\,\text{ſin.}\,C + \text{ſin.}\,B\,\text{coſ.}\,C\,\text{coſ.}\,a}{\text{ſin.}\,B\,\text{ſin.}\,a} \qquad \text{cot.}\,c = \frac{\text{ſin.}\,B\,\text{coſ.}\,C + \text{coſ.}\,B\,\text{ſin.}\,C\,\text{coſ.}\,a}{\text{ſin.}\,C\,\text{ſin.}\,a}$$

$$\text{cot.}\,c = \frac{\text{coſ.}\,C\,\text{ſin.}\,A + \text{ſin.}\,C\,\text{coſ.}\,A\,\text{coſ.}\,b}{\text{ſin.}\,C\,\text{ſin.}\,b} \qquad \text{cot.}\,a = \frac{\text{ſin.}\,C\,\text{coſ.}\,A + \text{coſ.}\,C\,\text{ſin.}\,A\,\text{coſ.}\,b}{\text{ſin.}\,A\,\text{ſin.}\,b}$$

§. 18. Haec ſimplicitas eo magis eſt notatu digna, quod reſolutio triangulorum rectangulorum adeo ſex formulas a ſe inuicem prorſus diuerſas requirat. Quod ſi enim angulus C fuerit rectus, ideoque c hypothenuſa et a et b ambo catheti, ſex formulae requiſitae ſunt ſequentes:

$$\text{coſ}\ c = \text{coſ.}\,a\,\text{coſ.}\,b$$
$$\text{coſ.}\ c = \text{cot.}\,A\,\text{cot.}\,B$$
$$\text{ſin.}\,a = \text{ſin.}\,c\,\text{ſin.}\,A \quad \text{ſiue} \quad \text{ſin.}\,b = \text{ſin.}\,c\,\text{ſin.}\,B$$
$$\text{tang.}\,b = \text{tang.}\,c\,\text{coſ.}\,A \;--\; \text{tang.}\,a = \text{tang.}\,c\,\text{coſ.}\,B$$
$$\text{tang.}\,a = \text{tang.}\,A\,\text{ſin.}\,b \;--\; \text{tang.}\,b = \text{tang.}\,B\,\text{ſin.}\,a$$
$$\text{coſ.}\,A = \text{coſ.}\,a\,\text{ſin.}\,B \;--\; \text{coſ.}\,B = \text{coſ.}\,b\,\text{ſin.}\,A$$

quae formulae ex ſuperioribus ſponte deriuantur, poſito $\text{coſ.}\,C = 0$ et $\text{ſin.}\,C = 1$.

§. 19. Quo autem logarithmi in vſum vocari queant, ex formis ſuperioribus aliae eius indolis ſunt deriuandae, quae ex factoribus conſtent, id quod per certas transformationes obtineri poteſt, quibus ad ſemiſſes tam angulo-

angulorum quam laterum deducimur. Has autem transformationes ſequentibus modis ſuccincte inſtituere licet.

Transformatio prima.

§. 20. Haec transformatio ex primae formae hac formula:

$$\operatorname{coſ.} A = \frac{\operatorname{coſ.} a - \operatorname{coſ.} b \operatorname{coſ.} c}{\operatorname{ſin.} b \operatorname{ſin.} c},$$

commodiſſime deriuatur. Hinc enim primo ſequitur:

$$1 - \operatorname{coſ.} A = \frac{\operatorname{coſ.} (b - c) - \operatorname{coſ.} a}{\operatorname{ſin.} b \operatorname{ſin.} c}$$

$$1 + \operatorname{coſ.} A = \frac{\operatorname{coſ.} a - \operatorname{coſ.} (b + c)}{\operatorname{ſin.} b \operatorname{ſin.} c}.$$

Hinc cum ſit

$$\frac{1 - \operatorname{coſ.} A}{1 + \operatorname{coſ.} A} = \operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} A^2, \text{ erit}$$

$$\operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} A^2 = \frac{\operatorname{coſ.} (b - c) - \operatorname{coſ.} a}{\operatorname{coſ.} a - \operatorname{coſ.} (b + c)};$$

conſtat autem eſſe

$$\operatorname{coſ.} p - \operatorname{coſ.} q = 2 \operatorname{ſin.} \tfrac{q - p}{2} \operatorname{ſin.} \tfrac{p + q}{2},$$

vnde habebimus

$$\operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\operatorname{ſin.} \frac{a - b + c}{2} . \operatorname{ſin.} \frac{a + b - c}{2}}{\operatorname{ſin.} \frac{b + c - a}{2} . \operatorname{ſin.} \frac{a + b + c}{2}}}.$$

Transformatio ſecunda.

§. 21. Haec petitur ex formae prioris formula

$$\operatorname{coſ.} a = \frac{\operatorname{coſ.} A + \operatorname{coſ.} B \operatorname{coſ.} C}{\operatorname{ſin.} B \operatorname{ſin.} C},$$

vnde deducitur

$$1 - \operatorname{coſ.} a = \frac{- \operatorname{coſ.} (B + C) - \operatorname{coſ.} A}{\operatorname{ſin.} B \operatorname{ſin.} C}$$

$$1 + \operatorname{coſ.} a = \frac{\operatorname{coſ.} A + \operatorname{coſ.} (B - C)}{\operatorname{ſin.} B \operatorname{ſin.} C},$$

 ſicque

ſicque erit

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2} a^2 = -\frac{\text{coſ.}(B+C) + \text{coſ.}\,A}{\text{coſ.}(B-C) + \text{coſ.}\,A}.$$

Cum iam ſit

$$\text{coſ.}\,p + \text{coſ.}\,q = 2\,\text{coſ.}\,\tfrac{p-q}{2}\ \text{coſ.}\,\tfrac{p+q}{2},\ \text{erit}$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\text{coſ.}\,\frac{B+C-A}{2}\ \text{coſ.}\,\frac{B+C+A}{2}}{\text{coſ.}\,\frac{B+A-C}{2}\ \text{coſ.}\,\frac{A+C-B}{2}}}.$$

Transformatio tertia.

§. 22. Hanc transformationem etiam ex prima forma expedire licet, combinandis his duabus formulis:

$$\text{coſ.}\,a - \text{coſ.}\,b\ \text{coſ.}\,c = \text{ſin.}\,b\ \text{ſin.}\,c\ \text{coſ.}\,A,$$

$$\text{coſ.}\,b - \text{coſ.}\,a\ \text{coſ.}\,c = \text{ſin.}\,a\ \text{ſin.}\,c\ \text{coſ.}\,B;$$

quarum illa per hanc diuiſa praebet,

$$\frac{\text{coſ.}\,a - \text{coſ.}\,b\ \text{coſ.}\,c}{\text{coſ.}\,b - \text{coſ.}\,a\ \text{coſ.}\,c} = \frac{\text{ſin.}\,b\ \text{coſ.}\,A}{\text{ſin.}\,a\ \text{coſ.}\,B} = \frac{\text{ſin.}\,B\ \text{coſ.}\,A}{\text{ſin.}\,A\ \text{coſ.}\,B}.$$

Addatur vtrinque vnitas, fietque

$$(\text{coſ.}\,a + \text{coſ.}\,b)(1 - \text{coſ.}\,c) = \frac{\text{ſin.}(A+B)}{\text{ſin.}\,A\ \text{coſ.}\,B},$$

ſubtrahatur vtrinque vnitas, prodibit

$$(\text{coſ.}\,a - \text{coſ.}\,b)(1 + \text{coſ.}\,c) = \frac{\text{ſin.}(B-A)}{\text{ſin.}\,A\ \text{coſ.}\,B},$$

quae aequatio per priorem diuiſa dat

$$\frac{\text{coſ.}\,a - \text{coſ.}\,b}{\text{coſ.}\,a + \text{coſ.}\,b}.\ \text{cot.}\ \tfrac{1}{2} c^2 = \frac{\text{ſin.}(B-A)}{\text{ſin.}(B+A)}.$$

Conſtat autem eſſe

$$\frac{\text{coſ.}\,p - \text{coſ.}\,q}{\text{coſ.}\,p + \text{coſ.}\,q} = \text{tang.}\,\tfrac{q+p}{2}\ \text{tang.}\,\tfrac{q-p}{2},$$

vnde colligitur:

$$\text{tang.}\,\tfrac{b-a}{2}.\ \text{tang.}\,\tfrac{b+a}{2}.\ \text{cot.}\ \tfrac{1}{2} c^2 = \frac{\text{ſin.}(B-A)}{\text{ſin.}(B+A)}.$$

§. 23.

§. 23. Iam in ſubſidium vocemus ex proprietate primaria hanc formulam:

$$\frac{\text{ſin.}\, b}{\text{ſin.}\, a} = \frac{\text{ſin.}\, B}{\text{ſin.}\, A},$$ vnde deducimus

$$\frac{\text{ſin.}\, b - \text{ſin.}\, a}{\text{ſin.}\, b + \text{ſin.}\, a} = \frac{\text{ſin.}\, B - \text{ſin.}\, A}{\text{ſin.}\, B + \text{ſin.}\, A},$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$\text{tang.}\, \tfrac{b-a}{2}\, \text{cot.}\, \tfrac{b+a}{2} = \text{tang.}\, \tfrac{B-A}{2}\, \text{cot.}\, \tfrac{B+A}{2}.$$

Quod ſi iam aequationem ante inuentam per hanc multiplicemus, prodibit iſta:

$$(\text{tang.}\, \tfrac{b-a}{2})^2\, \text{cot.}\, \tfrac{1}{2} c^2 = \frac{(\text{ſin.}\, \frac{B-A}{2})^2}{(\text{ſin.}\, \frac{B+A}{2})^2}.$$

ſiue extracta radice

$$\text{tang.}\, \tfrac{b-a}{2}\, \text{cot.}\, \tfrac{1}{2} c = \frac{\text{ſin.}\, \frac{B-A}{2}}{\text{ſin.}\, \frac{B+A}{2}}.$$

At vero prior formula per poſteriorem diuiſa dat

$$\text{tang.}\, \tfrac{b+a}{2}\, \text{cot.}\, \tfrac{1}{2} c = \frac{\text{coſ.}\, \frac{B-A}{2}}{\text{coſ.}\, \frac{B+A}{2}}.$$

His igitur formulis reſoluitur caſus, quo dantur duo anguli A et B cum latere intercepto c, et quaeruntur ambo latera a et b, quod fit ope harum formularum:

$$\text{tang.}\, \tfrac{b-a}{2} = \text{tang.}\, \tfrac{1}{2} c.\, \frac{\text{ſin.}\, \frac{B-A}{2}}{\text{ſin.}\, \frac{B+A}{2}}$$

$$\text{tang.}\, \tfrac{b+a}{2} = \text{tang.}\, \tfrac{1}{2} c.\, \frac{\text{coſ.}\, \frac{B-A}{2}}{\text{coſ.}\, \frac{B+A}{2}}.$$

Transformatio quarta.

§. 24. Haec ſimili modo deducitur ex his formulis:

$$\text{coſ. } A + \text{coſ. } B \text{ coſ. } C = \text{ſin. } B \text{ ſin. } C \text{ coſ. } a$$

$$\text{coſ. } B + \text{coſ. } A \text{ coſ. } C = \text{ſin. } A \text{ ſin. } C \text{ coſ. } b$$

quarum illa per hanc diuiſa praebet

$$\frac{\text{coſ. } A + \text{coſ. } B \text{ coſ. } C}{\text{coſ. } B + \text{coſ. } A \text{ coſ. } C} = \frac{\text{ſin. } B \text{ coſ. } a}{\text{ſin. } A \text{ coſ. } b} = \frac{\text{ſin. } b \text{ coſ. } a}{\text{ſin. } a \text{ coſ. } b}.$$

Vnde vnitatem tam addendo quam ſubtrahendo ſequentes nouae deriuantur aequationes:

$$(\text{coſ. } A + \text{coſ. } B)(1 + \text{coſ. } C) = \frac{\text{ſin. } (a + b)}{\text{ſin. } a \text{ coſ. } b}$$

$$(\text{coſ. } A - \text{coſ. } B)(1 - \text{coſ. } C) = \frac{\text{ſin. } (b - a)}{\text{ſin. } a \text{ coſ. } b},$$

et diuidendo illam per hanc nanciſcimur:

$$\frac{\text{coſ. } A + \text{coſ. } B}{\text{coſ. } A - \text{coſ. } B} \text{ cot. } \tfrac{1}{2} C^2 = \frac{\text{ſin. } (a + b)}{\text{ſin. } (b - a)}, \text{ ſiue}$$

$$\text{tang. } \frac{B - A}{2}. \text{ tang. } \frac{B + A}{2} = \text{cot. } \tfrac{1}{2} C^2. \frac{\text{ſin. } (b - a)}{\text{ſin. } (b + a)},$$

quae aequatio, multiplicata et diuiſa per iſtam:

$$\text{tang. } \frac{B - A}{2}. \text{ cot. } \frac{B + A}{2} = \text{tang. } \frac{b - a}{2} \text{ cot. } \frac{b + a}{2},$$

producit

$$\text{tang. } \frac{B - A}{2} = \text{cot. } \tfrac{1}{2} C. \frac{\text{ſin. } \frac{b - a}{2}}{\text{ſin. } \frac{b + a}{2}}$$

$$\text{tang. } \frac{B + A}{2} = \text{cot. } \tfrac{1}{2} C. \frac{\text{coſ. } \frac{b - a}{2}}{\text{coſ. } \frac{b + a}{2}}$$

quae formulae valent pro caſu, quo dantur duo latera cum angulo intercepto.

§ 25. Quoniam praecedentium formarum omnes variationes appoſuimus, etiam hos quatuor caſus cum omnibus

nibus variationibus conſpectui exponamus.

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{ſin.}\ \frac{a+b-c}{2}\ \text{ſin.}\ \frac{a+c-b}{2}}{\text{ſin.}\ \frac{b+c-a}{2}\ \text{ſin.}\ \frac{a+b+c}{2}}}$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\text{ſin.}\ \frac{b+c-a}{2}.\ \text{ſin.}\ \frac{a+b-c}{2}}{\text{ſin.}\ \frac{a+c-b}{2}\ \text{ſin.}\ \frac{a+b+c}{2}}}$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\text{ſin.}\ \frac{a+c-b}{2}\ \text{ſin.}\ \frac{b+c-a}{2}}{\text{ſin.}\ \frac{a+b-c}{2}\ \text{ſin.}\ \frac{a+b+c}{2}}}$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\,\text{coſ.}\ \frac{B+C-A}{2}\ \text{coſ.}\ \frac{A+B+C}{2}}{\text{coſ.}\ \frac{A+B-C}{2}\ \text{coſ.}\ \frac{A+C-B}{2}}}$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2} b = \sqrt{\frac{-\,\text{coſ.}\ \frac{A+C-B}{2}\ \text{coſ.}\ \frac{A+B+C}{2}}{\text{coſ.}\ \frac{B+C-A}{2}\ \text{coſ.}\ \frac{A+B-C}{2}}}$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2} c = \sqrt{\frac{-\,\text{coſ.}\ \frac{A+B-C}{2}\ \text{coſ.}\ \frac{A+B+C}{2}}{\text{coſ.}\ \frac{A+C-B}{2}\ \text{coſ.}\ \frac{B+C-A}{2}}}$$

$\text{tang.}\ \frac{b-a}{2} = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2} c\ \frac{\text{ſin.}\ \frac{B-A}{2}}{\text{ſin.}\ \frac{B+A}{2}}$	$\text{tang.}\ \frac{b+a}{2} = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2} c\ \frac{\text{coſ.}\ \frac{B-A}{2}}{\text{coſ.}\ \frac{B+A}{2}}$
$\text{tang.}\ \frac{c-b}{2} = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2} a\ \frac{\text{ſin.}\ \frac{C-B}{2}}{\text{ſin.}\ \frac{C+B}{2}}$	$\text{tang.}\ \frac{c+b}{2} = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2} a\ \frac{\text{coſ.}\ \frac{C-B}{2}}{\text{coſ.}\ \frac{C+B}{2}}$
$\text{tang.}\ \frac{a-c}{2} = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2} b\ \frac{\text{ſin.}\ \frac{A-C}{2}}{\text{ſin.}\ \frac{A+C}{2}}$	$\text{tang.}\ \frac{a+c}{2} = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2} b\ \frac{\text{coſ.}\ \frac{A-C}{2}}{\text{coſ.}\ \frac{A+C}{2}}$

$\text{tang}\ \frac{B-A}{2} = \text{cot.}\ \tfrac{1}{2} C\ \frac{\text{ſin.}\ \frac{b-a}{2}}{\text{ſin.}\ \frac{b+a}{2}}$	$\text{tang.}\ \frac{B+A}{2} = \text{cot.}\ \tfrac{1}{2} C\ \frac{\text{coſ.}\ \frac{b-a}{2}}{\text{coſ.}\ \frac{b+a}{2}}$
$\text{tang.}\ \frac{C-B}{2} = \text{cot.}\ \tfrac{1}{2} A\ \frac{\text{ſin.}\ \frac{c-b}{2}}{\text{ſin.}\ \frac{c+b}{2}}$	$\text{tang.}\ \frac{C+B}{2} = \text{cot.}\ \tfrac{1}{2} A\ \frac{\text{coſ.}\ \frac{c-b}{2}}{\text{coſ.}\ \frac{c+b}{2}}$
$\text{tang.}\ \frac{A-C}{2} = \text{cot.}\ \tfrac{1}{2} B\ \frac{\text{ſin.}\ \frac{a-c}{2}}{\text{ſin.}\ \frac{a-c}{2}}$	$\text{tang.}\ \frac{A+C}{2} = \text{cot.}\ \tfrac{1}{2} B\ \frac{\text{coſ.}\ \frac{a-c}{2}}{\text{coſ.}\ \frac{a+c}{2}}$

§. 26. Ex his poſtremis formulis iam facile expeditur caſus, quem nondum attigimus, quo dantur duo latera cum angulis oppoſitis, et vel tertium latus vel tertius angulus quaeritur, quorum vtrumque duplici modo fieri poteſt. Has ergo formulas cum variationibus apponamus.

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}c = \text{tang.}\,\frac{b-a}{2}\,\frac{\text{ſin.}\,\frac{B+A}{2}}{\text{ſin.}\,\frac{B-A}{2}} \qquad \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}c = \text{tang.}\,\frac{b+a}{2}\,\frac{\text{coſ.}\,\frac{B+A}{2}}{\text{coſ.}\,\frac{B-A}{2}}$$

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}a = \text{tang.}\,\frac{c-b}{2}\,\frac{\text{ſin.}\,\frac{C+B}{2}}{\text{ſin.}\,\frac{C-B}{2}} \qquad \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}a = \text{tang.}\,\frac{c+b}{2}\,\frac{\text{coſ.}\,\frac{C+B}{2}}{\text{coſ.}\,\frac{C-B}{2}}$$

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}b = \text{tang.}\,\frac{a-c}{2}\,\frac{\text{ſin.}\,\frac{A+C}{2}}{\text{ſin.}\,\frac{A-C}{2}} \qquad \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}b = \text{tang.}\,\frac{a+c}{2}\,\frac{\text{coſ.}\,\frac{A+C}{2}}{\text{coſ.}\,\frac{A-C}{2}}$$

$$\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}C = \text{tang.}\,\frac{B-A}{2}\,\frac{\text{ſin.}\,\frac{b+a}{2}}{\text{ſin.}\,\frac{b-a}{2}} \qquad \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}C = \text{tang.}\,\frac{B+A}{2}\,\frac{\text{coſ.}\,\frac{b+a}{2}}{\text{coſ.}\,\frac{b-a}{2}}$$

$$\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}A = \text{tang.}\,\frac{C-B}{2}\,\frac{\text{ſin.}\,\frac{c+b}{2}}{\text{ſin.}\,\frac{c-b}{2}} \qquad \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}A = \text{tang.}\,\frac{C+B}{2}\,\frac{\text{coſ.}\,\frac{c+b}{2}}{\text{coſ.}\,\frac{c-b}{2}}$$

$$\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}B = \text{tang.}\,\frac{A-C}{2}\,\frac{\text{ſin.}\,\frac{a+c}{2}}{\text{ſin.}\,\frac{a-c}{2}} \qquad \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}B = \text{tang.}\,\frac{A+C}{2}\,\frac{\text{coſ.}\,\frac{a+c}{2}}{\text{coſ.}\,\frac{a-c}{2}}$$

Hoc igitur modo praeſens tractatio tanquam ſyſtema completum totius Trigonometriae ſphaericae ſpectari poteſt.

PHY-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

DE

MOTV OSCILLATORIO MIXTO
PLVRIVM PENDVLORVM
EX EODEM CORPORE MOBILI SVSPENSORVM.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Sit A A′ A″ corpus quodcunque, quod libere gyrari queat circa punctum O, ſeu potius circa axem horizontalem, ad planum figurae, quod verticale eſt intelligendum, normalem, atque in quotcunque eius punctis A, A′, A″, A‴, etc. ſuſpenſa ſint pendula A L, A′ L′, A″ L″ etc., quae ergo ſingula motum oſcillatorium recipere poſſunt, dum ipſum corpus circa punctum O oſcillationes peragit; quo poſito quaeritur, qualis motus in hoc corpore et omnibus pendulis oriri debeat, poſtquam illis initio motus quicunque fuerit impreſſus. Per ſe autem manifeſtum eſt hic non niſi de oſcillationibus minimis quaeſtionem eſſe poſſe. Tab. II. Fig. 1.

§. 2. Antequam autem in hos motus inquiram, conſiderari opportet ſtatum aequilibrii, in quo corpus cum

omnibus pendulis quieſcere poſſit. Hunc in finem per O ducatur recta horizontalis E O F, et ductis ex O ad ſingula puncta A, A′, A″ etc., ex quibus pendula ſuſpenduntur, rectis O A, O A′, O A″ etc. vocentur iſtae rectae O A $= a$, O A′ $= a'$, O A″ $= a''$ etc.; tum vero ponantur anguli E O A $= \alpha$, E O A′ $= \alpha'$, E O A″ $= \alpha''$ etc.; has ſcilicet diſtantias et angulos ſimilibus literis deſigno, vt, quod de vno dicetur, ſimul ad omnia reliqua transferri posſit. Porro huius corporis maſſa vocetur $= M$, eiusque momentum inertiae reſpectu puncti O $= M\,k\,k$; eius vero centrum grauitatis reperiatur in puncto G, pro quo ſit diſtantia O G $= e$ et angulus E O G $= \varepsilon$, qui quidem foret rectus in ſtatu aequilibrii, ſi de ſolo hoc corpore eſſet ſermo; verum hic ſimul conſideramus omnia pendula A L, A′ L′, A″ L″ etc., quae ſingula ſitum teneant verticalem; ac primo eorum longitudines ita deſignemus: A L $= l$, A′ L′ $= l'$, A″ L″ $= l''$ etc., quas tanquam fila grauitatis expertia ſpectamus, quibus appenſa ſint corpora L, L′, L″ etc. Cum iam in hoc ſtatu detur aequilibrium, neceſſe eſt vt ſumma omnium momentorum reſpectu puncti O nihilo fiat aequalis, vnde oritur ſequens aequatio:

$$M\,e\,\text{coſ.}\,\varepsilon + L\,a\,\text{coſ.}\,\alpha + L'\,a'\,\text{coſ.}\,\alpha' + L''\,a''\,\text{coſ.}\,\alpha'' + \text{etc.} = 0.$$

§. 3. Nunc autem, poſtquam hoc corpus cum pendulis ſuis de ſtatu aequilibrii vtcunque fuerit deturbatum, elapſo tempore $= t$ ipſum corpus declinet a ſitu aequilibrii angulo quam minimo $= \Phi$, ita vt iam ſinguli anguli α, α', α'' etc. vna cum angulo ε idem acceperint augmentum Φ; tum vero ſingula pendula declinent a directione verticali ſiniſtrorſum angulis minimis ω, ω', ω'' etc., ac praeterea ſint vires, quibus ſingula pendula tenduntur T, T′, T″ etc.; qui-

quibus poſitis inveſtigandum eſt, quantis viribus, tam ipſum corpus, quam ſingula pendula, ad motum concitentur.

§. 4. Quod igitur ad ipſum corpus M, quatenus circa punctum O eſt mobile, attinet, id primum a proprio pondere, in centro grauitatis G collecto, ſollicitatur, cuius vis momentum eſt

$$M. OG. \text{coſ.} (\varepsilon + \Phi) = M e \,\text{coſ.} (\varepsilon + \Phi).$$

Quia nunc angulus ε incrementum cepit Φ, ob hunc angulum Φ infinite paruum, erit

$$\text{coſ} (\varepsilon + \Phi) = \text{coſ.}\, \varepsilon - \Phi \,\text{ſin.}\, \varepsilon$$

vnde hoc momentum erit $M e \,\text{coſ.}\, \varepsilon - M e \Phi \,\text{ſin}\, \varepsilon$, quod tendit dextrorſum ideoque ad inclinationem Φ augendam, ſi quidem poſitiuum habuerit valorem. Praeterea vero hoc corpus ſollicitatur a ſingulis pendulis, quatenus ſcilicet fila A L, A' L', A'' L'' etc. viribus T, T', T'' tenduntur, vbi ſufficiet vnicum conſideraſſe. Igitur ex pendulo A L, ſi ſitum teneret verticalem, orietur momentum

$$T. OA \,\text{ſin.}\, OAL = T a \,\text{coſ.} (\alpha + \Phi),$$

quia ſcilicet angulus α incrementum cepit $= \Phi$; quoniam autem hoc pendulum ſiniſtrorſum a ſitu verticali declinat angulo ω, erit hoc momentum

$$T a \,\text{coſ.} (\alpha + \Phi + \omega) = T a \,\text{coſ.}\, \alpha - T a (\Phi + \omega) \,\text{ſin.}\, \alpha$$

quod pariter ad inclinationem Φ augendam tendit; vnde omnia momenta ex pendulis nata erunt

$$\begin{aligned} &T a \,\text{coſ.}\, \alpha + T' a' \,\text{coſ.}\, \alpha' + T'' a'' \,\text{coſ.}\, \alpha'' \\ &- T a (\Phi + \omega) \,\text{ſin.}\, \alpha - T' a' (\Phi + \omega') \,\text{ſin.}\, \alpha' - T'' a'' (\Phi + \omega'') \,\text{ſin.}\, \alpha''. \end{aligned}$$

§. 5. Ponamus breuitatis gratia

$$T\,a \,\text{coſ.}\, \alpha + T'\,a' \,\text{coſ.}\, \alpha' + T''\,a'' \,\text{coſ.}\, \alpha'' + \text{etc.} = P,$$

$$T\,a \,\text{ſin.}\, \alpha + T'\,a' \,\text{ſin.}\, \alpha' + T''\,a'' \,\text{ſin.}\, \alpha'' + \text{etc.} = Q, \text{ et}$$

$$T\,a\,\omega \,\text{ſin.}\, \alpha + T'\,a'\,\omega' \,\text{ſin.}\, \alpha' + T''\,a''\,\omega'' \,\text{ſin.}\, \alpha'' + \text{etc.} = \Omega$$

ita vt totum momentum, motum gyratorium corporis A accelerans, ſit

$$M\,e \,\text{coſ.}\, \varepsilon - M\,e\,\Phi \,\text{ſin.}\, \varepsilon + P - Q\,\Phi - \Omega;$$

vnde, cum momentum inertiae corporis M, reſpectu puncti O, poſitum ſit $= M\,k\,k$, principia motus hanc ſuppeditant aequationem:

$$\frac{d\,d\,\Phi}{2\,g\,d\,t^2} = \frac{M\,e \,\text{coſ.}\, \varepsilon - M\,e\,\Phi \,\text{ſin.}\, \varepsilon + P - Q\,\Phi - \Omega}{M\,k\,k}.$$

Euidens autem eſt; quia ſingula pendula tantum infinite parum a ſitu verticali declinant, tenſiones filorum ipſis ponderibus L, L', L'' fore aequales; vnde, cum ſupra pro ſtatu aequilibrii eſſet

$$M\,e \,\text{coſ.}\, \varepsilon + L\,a \,\text{coſ.}\, \alpha + L'\,a' \,\text{coſ.}\, \alpha' + L''\,a'' \,\text{coſ.}\, \alpha'' + \text{etc.} = 0$$

erit hic $M\,e \,\text{coſ}\, \varepsilon + P = 0$, ita vt iam habeamus

$$\frac{d\,d\,\Phi}{2\,g\,d\,t^2} = -\frac{M\,e\,\Phi \,\text{ſin.}\, \varepsilon - Q\,\Phi - \Omega}{M\,k\,k},$$

exiſtente

$$Q = L\,a \,\text{ſin.}\, \alpha + L'\,a' \,\text{ſin.}\, \alpha' + L''\,a'' \,\text{ſin.}\, \alpha'' + \text{etc. et}$$

$$\Omega = L\,a\,\omega \,\text{ſin.}\, \alpha + L'\,a'\,\omega' \,\text{ſin.}\, \alpha' + L''\,a''\,\omega'' \,\text{ſin.}\, \alpha'' + \text{etc.}$$

Tab. II. Fig. 2. §. 6. Porro pro motu ſingulorum pendulorum definiendo vnicum conſideraſſe ſufficiet. Hunc in finem ex puncto L in axem horizontalem O E ducatur verticalis L P, vt pro puncto L habeamus coordinatas $O\,P = x$ et $P\,L = y$; tum autem ducta etiam verticali $a\,A\,\alpha$ et horizontali $A\,b$, ob angulum $A\,O\,P = \alpha + \Phi$, erit

O ω

$$O\,a = a\,\text{coſ.}\,(\alpha + \Phi) \text{ et } A\,a = a\,\text{ſin.}\,(\alpha + \Phi).$$

Deinde ob angulum $L\,A\,a = \omega$ erit

$$A\,b = l\,\text{ſin.}\,\omega \text{ et } L\,b = l\,\text{coſ.}\,\omega,$$

vnde colligitur

$$O\,P = x = a\,\text{coſ.}\,(\alpha+\Phi) + l\,\text{ſin.}\,\omega = a\,\text{coſ.}\,\alpha - a\,\Phi\,\text{ſin.}\,\alpha + l\,\omega, \text{ et}$$
$$P\,L = y = a\,\text{ſin.}\,(\alpha+\Phi) + l\,\text{coſ.}\,\omega = a\,\text{ſin.}\,\alpha + a\,\Phi\,\text{coſ.}\,\alpha + l.$$

§. 7. Vires autem corpus L vrgentes ſunt primo eius pondus $= L$, quod tendit ad quantitatem y augendam, tum vero, ob tenſionem fili T, ſurſum vrgetur vi $= T\,\text{coſ.}\,\omega = T$, dextrorſum autem vi $= T\,\text{ſin.}\,\omega = T\,\omega$; vnde ex principiis motus nanciſcimur has aequationes:

$$\frac{d\,d\,x}{2\,g\,d\,t^2} = -\frac{T\,\omega}{L} \text{ et } \frac{d\,d\,y}{2\,g\,d\,t^2} = \frac{L - T}{L};$$

hinc, pro x et y valores ſubſtituendo, habebimus has aequationes:

$$-\frac{a\,d\,d\,\Phi\,\text{ſin.}\,\alpha + l\,d\,d\,\omega}{2\,g\,d\,t^2} = -\frac{T\,\omega}{L} \text{ et } \frac{a\,d\,d\,\Phi\,\text{coſ.}\,\alpha}{2\,g\,d\,t^2} = \frac{L - T}{L},$$

ex qua poſteriore intelligitur, tenſionem T infinite parum a pondere L diſcrepare, quia membrum $\frac{a\,d\,d\,\Phi\,\text{coſ.}\,\alpha}{2\,g\,d\,t^2}$ pro infinite paruo eſt habendum. Poſito ergo $T = L$ ſola aequatio prior nobis relinquitur, quae eſt

$$\frac{-a\,d\,d\,\Phi + l\,d\,d\,\omega}{2\,g\,d\,t^2} = -\,\omega.$$

§. 8. Similes plane aequationes pro ſingulis reliquis pendulis reperiuntur. Verum quo omnes has aequationes concinniores reddamus, ponamus breuitatis gratia

$$a\,\text{ſin.}\,\alpha = b;\; a'\,\text{ſin.}\,\alpha' = b';\; a''\,\text{ſin.}\,\alpha'' = b'';\ \text{etc.}$$
$$a\,\text{coſ.}\,\alpha = c;\; a'\,\text{coſ.}\,\alpha' = c';\; a''\,\text{coſ.}\,\alpha'' = c'';\ \text{etc.}$$

ſic enim erit

$$Q = L\,b + L'\,b' + L''\,b'' + L'''\,b''' + \text{etc. et}$$
$$\Omega = L\,b\,\omega + L'\,b'\,\omega' + L''\,b''\,\omega'' + \text{etc.}$$

vnde erit primo pro motu ipſius corporis

$$\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = -\frac{M\,e\,\Phi\,\text{ſin.}\,\varepsilon - Q\,\Phi - \Omega}{M\,k\,k};$$

pro ſingulis autem pendulis erunt aequationes

$$\text{I.}\ \frac{-b\,dd\Phi + l\,dd\omega}{2g\,dt^2} = -\omega;$$
$$\text{II.}\ \frac{-b'\,dd\Phi + l'\,dd\omega'}{2g\,dt^2} = -\omega';$$
$$\text{III.}\ \frac{-b''\,dd\Phi + l''\,dd\omega''}{2g\,dt^2} = -\omega'';$$
$$\text{IV.}\ \frac{-b'''\,dd\Phi + l'''\,dd\omega'''}{2g\,dt^2} = -\omega''';$$

quibus aequationibus totus motus determinatur. Pro ſtatu autem aequilibrii recordandum eſt eſſe

$$M\,e\,\text{coſ.}\,\varepsilon + L\,c + L'\,c' + L''\,c'' + L'''\,c''' + \text{etc.} = 0.$$

§. 9. Quia in his omnibus aequationibus incognitae Φ, ω, ω', ω'', ω''' etc. vbique vnicam tantum tenent dimenſionem, pro earum reſolutione methodo iam ſaepius adhibita vtamur, vnde primo quidem tantum ſolutionem ſpecialem reperimus, qua ſinguli motus inſtar pendulorum ſimplicium abſoluuntur. Pro angulo igitur Φ ſtatuamus, pendulum ſimplex, eius motui iſochronum, eſſe $= r$, ita vt ſit $\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = -\frac{\Phi}{r}$; vnde deducitur integrando $\Phi = F\,\text{ſin}\,(f + t\sqrt{\frac{2g}{r}})$; vbi F et f ſunt conſtantes arbitrariae per integrationes ingreſſae; quantitas autem r etiamnunc eſt incognita ex reliquis motibus determinanda, pro qua cum plures eruturi ſimus valores, iis coniungendis ſolutionem generaliſſimam completam adipiſcemur.

§. 10.

§. 10. In noſtris igitur aequationibus vbique loco formulae $\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2}$ ſcribamus eius valorem $-\frac{\Phi}{r}$; tum vero ſtatuamus

$$\omega = b\Phi,\ \omega' = b'\Phi,\ \omega'' = b''\Phi, \text{ etc.}$$

vt ſit

$$\frac{dd\omega}{2g\,dt^2} = -\frac{b\Phi}{r},\ \frac{dd\omega'}{2g\,dt^2} = -\frac{b'\Phi}{r},\ \frac{dd\omega''}{2g\,dt^2} = -\frac{b''\Phi}{r}, \text{ etc.}$$

quibus ſubſtitutis omnes noſtras aequationes per angulum Φ diuidere licebit, hincque pro ſingulis pendulis ſequentes orientur aequalitates:

I. $\frac{b}{r} - \frac{bl}{r} = -b$, vnde fit $b = \frac{b}{l-r}$;

II. $\frac{b'}{r} - \frac{b'l'}{r} = -b'$ - - $b' = \frac{b'}{l'-r}$;

III. $\frac{b''}{r} - \frac{b''l''}{r} = -b''$ - - $b'' = \frac{b''}{l''-r}$;

etc. etc. etc.

Aequatio autem pro motu ipſius corporis euadet

$$-\frac{\Phi}{r} = -\frac{Me\Phi\,\text{ſin.}\,\varepsilon - Q\Phi - \Omega}{Mkk},$$

vbi cum ſit

$$Q = Lb + L'b' + L''b'' + L'''b''' + \text{etc. et}$$

$$\Omega = Lbb\Phi + L'b'b'\Phi + L''b''b''\Phi + \text{etc.}$$

his valoribus ſubſtitutis, ſi praeterea loco b, b', b'' etc. valores ante inuenti ſurrogentur, orietur ſequens aequatio:

$$0 = \frac{Mkk}{r} - Me\,\text{ſin.}\,\varepsilon - Q - \frac{Lbb}{l-r} - \frac{L'b'b'}{l'-r} - \frac{L''b''b''}{l''-r} - \text{etc.}$$

ex qua aequatione quantitatem incognitam r erui oportet.

§. 11. Quo hanc aequationem ad formam commodiorem redigamus, totam per $Me\,\text{ſin.}\,\varepsilon + Q$ deuidamus, ponamusque breuitatis gratia

$$\frac{Mkk}{Me\,\text{ſin.}\,\varepsilon + Q} = m,$$

tum

tum vero

$$\frac{\mathrm{I}\,b\,b}{\mathrm{M}\,e\,\text{ſin}.\,\varepsilon+\mathrm{Q}}=n;\quad \frac{\mathrm{I}'\,b'\,b'}{\mathrm{M}\,e\,\text{ſin}.\,\varepsilon+\mathrm{Q}}=n';\quad \frac{\mathrm{I}''\,b''\,b''}{\mathrm{M}\,e\,\text{ſin}.\,\varepsilon+\mathrm{Q}}=n'';\ \text{etc.}$$

et impetrabimus hanc aequationem:

$$0=\frac{m}{r}-1-\frac{n}{l-r}-\frac{n'}{l'-r}-\frac{n''}{l''-r}-\text{etc.}$$

quae aequatio, in ordinem redacta pro incognita r, aſcendet ad gradum vnitate altiorem quam eſt numerus pendulorum.

§. 12. Totum ergo negotium reductum eſt ad reſolutionem aequationis algebraicae, cuius radicem r erui opportet; vnde ſi radix quaecunque r fuerit inuenta, ex ea ſolutio particularis noſtri problematis deriuabitur, quae ſequentibus formulis continebitur:

$$\Phi=\mathrm{F}\ \text{ſin}.\left(f+t\sqrt{\tfrac{2g}{r}}\right),\quad \omega=\frac{\mathrm{F}\,b}{l-r}\ \text{ſin}.\left(f+t\sqrt{\tfrac{2g}{r}}\right),$$

$$\omega'=\frac{\mathrm{F}\,b'}{l'-r}\ \text{ſin}.\left(f+t\sqrt{\tfrac{2g}{r}}\right),\quad \omega''=\frac{\mathrm{F}\,b''}{l''-r}\ \text{ſin}.\left(f+t\sqrt{\tfrac{2g}{r}}\right),$$

$$\omega''=\frac{\mathrm{F}\,b'''}{l'''-r}\ \text{ſin}.\left(f+t\sqrt{\tfrac{2g}{r}}\right);\ \text{etc.}$$

Sicque hoc caſu omnes oſcillationes, tam ipſius corporis, quam ſingulorum pendulorum, erunt regulares et inter ſe iſochronae, dum omnes reſpondent pendulo ſimplici, cuius longitudo $=r$, vnde tempus vniuscuiusque oſcillationis erit $=\pi\sqrt{\frac{r}{2g}}$.

§. 13. Quotquot igitur quantitas r habuerit radices, ex ſingulis talis motus regularis oriri poteſt; ſinguli autem per ſe tantum ſpeciem motus ſpecialiſſimam complectuntur. At vero ſi omnes iſtae ſpecies inter ſe quomodocunque coniungantur, ſolutio inde reſultabit generaliſſima, quae omnes plane motus, quos hoc ſyſtema recipere poteſt, in ſe complectitur, ita vt, quomodocunque totum

tum ſyſtema initio fuerit agitatum et de ſtatu aequilibrii deturbatum, verus motus, qui ſequetur, aſſignari valeat.

§. 14. Vt hinc igitur iſtam ſolutionem maxime generalem adipiſcamur, omnes valores ipſius r per ſequentes characteres indicemus: $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ etc. pro coefficiente autem F ſcribamus ſucceſſiue litteras Germanicas maiusculas: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ etc. atque formulae ſolutionem generalem praebentes erunt:

$$\Phi = \mathfrak{A}\,\text{ſin.}\,(f + t\sqrt{\tfrac{2g}{\mathfrak{a}}}) + \mathfrak{B}\,\text{ſin.}\,(f' + t\sqrt{\tfrac{2g}{\mathfrak{b}}}) + \mathfrak{C}\,\text{ſin.}\,(f'' + t\sqrt{\tfrac{2g}{\mathfrak{c}}}) + \text{etc.}$$

$$\omega = \frac{\mathfrak{A}\,b}{l-\mathfrak{a}}\,\text{ſin.}\,(f + t\sqrt{\tfrac{2g}{\mathfrak{a}}}) + \frac{\mathfrak{B}\,b}{l-\mathfrak{b}}\,\text{ſin.}\,(f' + t\sqrt{\tfrac{2g}{\mathfrak{b}}}) + \frac{\mathfrak{C}\,b}{l-\mathfrak{c}}\,\text{ſin.}\,(f'' + t\sqrt{\tfrac{2g}{\mathfrak{c}}}) + \text{etc.}$$

$$\omega' = \frac{\mathfrak{A}\,b'}{l'-\mathfrak{a}}\,\text{ſin.}\,(f + t\sqrt{\tfrac{2g}{\mathfrak{a}}}) + \frac{\mathfrak{B}\,b'}{l'-\mathfrak{b}}\,\text{ſin.}\,(f' + t\sqrt{\tfrac{2g}{\mathfrak{b}}}) + \frac{\mathfrak{C}\,b'}{l'-\mathfrak{c}}\,\text{ſin.}\,(f'' + t\sqrt{\tfrac{2g}{\mathfrak{c}}}) + \text{etc.}$$

$$\omega'' = \frac{\mathfrak{A}\,b''}{l''-\mathfrak{a}}\,\text{ſin.}\,(f + t\sqrt{\tfrac{2g}{\mathfrak{a}}}) + \frac{\mathfrak{B}\,b''}{l''-\mathfrak{b}}\,\text{ſin.}\,(f' + t\sqrt{\tfrac{2g}{\mathfrak{b}}}) + \frac{\mathfrak{C}\,b''}{l''-\mathfrak{c}}\,\text{ſin.}\,(f'' + t\sqrt{\tfrac{2g}{\mathfrak{c}}}) + \text{etc.}$$

$$\omega''' = \frac{\mathfrak{A}\,b'''}{l'''-\mathfrak{a}}\,\text{ſin.}\,(f + t\sqrt{\tfrac{2g}{\mathfrak{a}}}) + \frac{\mathfrak{B}\,b'''}{l'''-\mathfrak{b}}\,\text{ſin.}\,(f' + t\sqrt{\tfrac{2g}{\mathfrak{b}}}) + \frac{\mathfrak{C}\,b'''}{l'''-\mathfrak{c}}\,\text{ſin}\,(f''' + t\sqrt{\tfrac{2g}{\mathfrak{c}}}) + \text{etc.}$$

etc. etc. etc.

Hic autem ſupponitur, omnes ipſius r valores eſſe inter ſe inaequales; ſi enim duo pluresue inter ſe eſſent aequales, ſolutio haec non amplius foret generalis, ſed peculiari artificio opus foret, vt inde ſolutio generalis obtineatur.

§. 15. Quod quo clarius appareat, ponamus pendulorum numerum eſſe $= \lambda$, et cum peruenerimus ad

 hanc

hanc aequationem:

$$0 = \frac{m}{r} - 1 - \frac{n}{l-r} - \frac{n'}{l'-r} - \frac{n''}{l''-r} - \text{etc.}$$

ſi eam, ad fractiones tollendas, multiplicemus per productum omnium denominatorum $r(l-r)$ $(l'-r)$ $(l''-r)$ etc. prodibit aequatio ordinis $\lambda + 1$, ſi quidem omnes denominatores fuerint inaequales, quod euenit ſi omnium pendulorum longitudines l, l', l'' etc. fuerint inaequales. At ſi duae ſint inter ſe aequales, puta $l' = l$, aequatio illa factorem habebit $l - r$, vnde radix prodiret $r = l$, qui tamen valor in noſtris formulis locum habere nequit. Si enim eſſet $a = l$, valores angulorum ω, ω', ω'' fierent infiniti; quod incommodum multo magis turbaret, ſi plura quam duo pendula haberent eandem longitudinem; vnde his caſibus aliae radices pro r admitti nequeunt, niſi quae ex noſtra aequatione reſultant, poſtquam ea fuerit diuiſa per $l - r$, vel $(l - r)^2$, vel $(l - r)^3$ etc., prout plura pendula fuerint inter ſe aequalia; quare, ob diminutum numerum valorum ipſius r, non amplius tot conſtantes arbitrariae in calculum introducentur, quot requiruntur ad ſolutionem generalem reddendam.

§. 16. Quin etiam apparet, ſi eſſet $\lambda' = \lambda$, tum valores angulorum ω et ω' datam inter ſe habituros eſſe rationem, ſcilicet vt b ad b', ſiue valores fractionum $\frac{\omega}{b}$ et $\frac{\omega'}{b'}$ inter ſe futuros eſſe aequales; quod ſi vero inſuper $l'' = l' = l$, hi tres valores: $\frac{\omega}{b}$, $\frac{\omega'}{b'}$ et $\frac{\omega''}{b''}$ inter ſe forent aequales, ſicque haec pendula ſimilem motum oſcillatorium eſſent habitura. Neque ergo haec ſolutio amplius eſſet generalis, cum iam in ipſo initio his pendulis diuerſus motus imprimi poſſet; quocirca his caſibus formulae noſtrae

ſtrae inuentae quadam correctione indigebunt, qua tot nouae conſtantes introducantur, quot ad ſolutionem completam poſtulantur. Has igitur correctiones omnino neceſſe erit inueſtigare.

§. 17. Ponamus igitur duo pendula longitudine inter ſe eſſe aequalia, ſiue eſſe $l' = l$; hinc autem duae aequationes differentio differentiales primae erunt:

$$-\frac{b\,dd\Phi + l\,dd\omega}{2g\,dt^2} = -\omega, \text{ et}$$

$$-\frac{b'\,dd\Phi + l\,dd\omega'}{2g\,dt^2} = -\omega';$$

vnde, ſi poſterior per b' diuiſa a priore per b diuiſa ſubtrahatur, remanebit:

$$\frac{l}{2g\,dt^2}\left(\frac{dd\omega}{b} - \frac{dd\omega'}{b'}\right) = -\frac{\omega}{b} + \frac{\omega'}{b'}.$$

Hinc ſi ponamus

$$\frac{\omega}{b} + \frac{\omega'}{b'} = 2p \text{ et } \frac{\omega}{b} - \frac{\omega'}{b'} = 2q, \text{ vt fiat}$$

$$\frac{\omega}{b} = p + q \text{ et } \frac{\omega'}{b'} = p - q$$

litera p manifeſto exprimit valores illos aequales, qui ex ſuperiori ſolutione pro $\frac{\omega}{b}$ et $\frac{\omega'}{b'}$ prodierunt, ita vt nunc ad alterum quantitas q addi, ab altero vero ſubtrahi debeat. Aequatio autem inuenta nunc induet hanc formam:

$$\frac{l}{2g\,dt^2}\, 2\,ddq = -2q, \text{ ſiue } \frac{ddq}{2g\,dt^2} = -\frac{q}{l},$$

qua motus penduli ſimplicis longitudinis $= l$ exprimitur, ita vt ſit $q = \mathfrak{J}\,\text{ſin.}\,(i + t\sqrt{\frac{2g}{l}})$. Hinc ergo quaeſita correctio pro caſu, quo $l' = l$, in hoc conſiſtit, vt, ſi p denotet valores ſupra exhibitos pro $\frac{\omega}{b}$ et $\frac{\omega'}{b'}$, nunc reuera ſit

$$\frac{\omega}{b} = p + \mathfrak{J}\,\text{ſin.}\,(i + t\sqrt{\tfrac{2g}{l}}) \text{ et}$$

$$\frac{\omega'}{b'} = p - \mathfrak{J}\,\text{ſin.}\,(i + t\sqrt{\tfrac{2g}{l}});$$

 ſicque

ſicque duae nouae conſtantes $\mathfrak{I}$ et i in calculum ſunt introductae. Reliquorum autem pendulorum pariter atque ipſius corporis motus iidem manent ac ſupra ſunt inuenti.

§. 18. Sint nunc tria pendula l, l' et l'' inter ſe aequalia, tum praeter duas ſuperiores aequationes accedit nunc inſuper tertia

$$-\frac{b'' d d \Phi + l d d \omega''}{2 g dt^2} = -\omega'';$$

Nunc igitur ex prima et tertia colligitur:

$$\frac{l}{2 g dt^2}\left(\frac{d d \omega}{b} - \frac{d d \omega''}{b''}\right) = -\frac{\omega}{b} + \frac{\omega''}{b''};$$

at vero ex ſecunda ac tertia

$$\frac{l}{2 g d t^2}\left(\frac{d d \omega'}{b'} - \frac{d d \omega''}{b''}\right) = -\frac{\omega'}{b'} + \frac{\omega''}{b''}.$$

Hinc, ſi vt ſupra operemur, reperiemus ſimili modo

$$\frac{\omega}{b} - \frac{\omega'}{b'} = \mathfrak{I} \text{ ſin. } (i + t \sqrt{\tfrac{2g}{l}})$$

$$\frac{\omega'}{b'} - \frac{\omega''}{b''} = \mathfrak{I}' \text{ ſin. } (i' + t \sqrt{\tfrac{2g}{l}}) \text{ et}$$

$$\frac{\omega''}{b''} - \frac{\omega}{b} = \mathfrak{I}'' \text{ ſin. } (i'' + t \sqrt{\tfrac{2g}{l}}),$$

quarum ergo trium formularum ſumma nihilo debet eſſe aequalis, vnde ſequitur fore

$$\mathfrak{I} \text{ ſin. } i + \mathfrak{I}' \text{ ſin. } i' + \mathfrak{I}'' \text{ ſin. } i'' = 0 \text{ et}$$

$$\mathfrak{I} \text{ coſ. } i + \mathfrak{I}' \text{ coſ. } i' + \mathfrak{I}'' \text{ coſ. } i'' = 0,$$

vnde numerus conſtantium ad quatuor reducitur. His notatis, ſi p denotet quantitatem, quae ſupra pro formulis $\frac{\omega}{b}$, $\frac{\omega'}{b'}$, $\frac{\omega''}{b''}$ fuit inuenta, nunc, correctione adiecta, habebimus

$$\frac{\omega}{b} = p + \mathfrak{I} \text{ ſin. } (i + t \sqrt{\tfrac{2g}{l}})$$

$$\frac{\omega'}{b'} = p + \mathfrak{I}' \text{ ſin. } (i' + t \sqrt{\tfrac{2g}{l}}) \text{ et}$$

$$\frac{\omega''}{b''} = p + \mathfrak{I}'' \text{ ſin. } (i'' + t \sqrt{\tfrac{2g}{l}}),$$

vbi

vbi conſtantes ita comparatas eſſe oportet, vt ſumma trium harum formularum fiat aequalis $3p$.

§. 19. Eodem modo ratiocinium erit inſtituendum, ſi plura pendula inter ſe fuerint aequalia; ita vt nunc ſuper hoc problemate nihil amplius ſit deſiderandum, quotcunque etiam pondera fuerint appenſa. Atque hinc etiam clariſſime elucet ſummus vſus faecundiſſimi principii Illuſtr. *Dan. Bernoulli*, quo omnes huiusmodi motus oscillatorios ſemper ex aliquot motibus pendulorum ſimplicium compoſitos eſſe ſtatuit. Imprimis vero etiam hinc patet, quam egregie iſtud principium cum primis Mechanicae principiis conſpiret, atque adeo ex iis immediate deduci queat. Pulcherrime ſcilicet hoc principium connexum eſt cum ea conditione, qua in omnibus huiusmodi motibus definiendis peruenitur ad eiusmodi aequationes differentiales ſecundi gradus, in quibus omnes incognitae vnicam vbique habent dimenſionem, ita vt ſemper dentur eiusmodi ſolutiones ſpeciales, in quibus omnes incognitae conſtantes inter ſe teneant rationes, quo ipſo oscillationes regulares ac ſimplices innuuntur. Tum vero ex omnibus his ſolutionibus ſpecialibus per ipſam naturam huiusmodi aequationum ſolutio generalis et completa formari poteſt.

§. 20. Quanquam autem haec ſolutio maxime eſt generalis, et omnes plane caſus in ſe complectitur, ſiue omnia pendula ſint longitudine aequalia ſiue inaequalia, ſi quidem pro aequalibus correctio expoſita adhibeatur: tamen dantur inſuper caſus, qui peculiarem reſolutionem requirunt, qui ſunt: quando pendula ab ipſo axe horizon-

 tali

tali E O F ſuſpenduntur, veluti ſi punctum A cadat in iſtum axem, ideoque angulus A O E $= \alpha$ euaneſcat; tum enim diſtantia $b = a$ ſin. α euaneſcet, vnde expreſſio noſtra, pro angulo ω inuenta, nullum plane motum huius penduli indicabit, cum tamen vtique motum recipere queat. Hoc autem caſu aequatio differentialis pro hoc pendulo non amplius inuoluet angulum ϕ, ſed erit ſimpliciter

$$\frac{l\,d\,d\,\omega}{2\,g\,dt^2} = -\,\omega;$$

vnde patet, iſtud pendulum motum oſcillatorium regularem recipere, perinde ac ſi ex puncto fixo eſſet ſuſpenſum, ita vt eius motus neque ab ipſo corpore M, neque a reliquis pendulis afficiatur. Ac viciſſim quoque hoc pendulum nihil plane conferet ad motum corporis M; quia enim $b = 0$, in quantitatem Q plane non ingreditur; ſimulque etiam quantitas n euaneſcit; vnde patet ab hoc pendulo motum corporis M nullo modo perturbari. Eodem modo res ſe habebit, ſi plura pendula ex ipſo axe E O F fuerint ſuſpenſa, tum enim ſingula libere ſuas oſcillationes peragent, neque vllo modo in motum reliquorum pendulorum, neque ipſius corporis M effectum exerent, quorum igitur motus perinde ſe habebit, ac ſi illa pendula prorſus abeſſent.

INVESTI-

INVESTIGATIO MOTVVM, QVIBVS LAMINAE ET VIRGAE ELASTICAE CONTREMISCVNT.

Auctore
L. EVLERO.

Quanquam hoc argumentum iam pridem tam ab Illuſtriſſ. *D. Bernoulli*, quam a me fuſius eſt pertractatum: tamen quia illo tempore neque principia, vnde huiusmodi motus determinari opportet, ſatis erant exculta, neque ea Analyſeos pars, quae circa functiones binarum variabilium verſatur, ſatis explorata, actum agere non videbor, ſi nunc idem argumentum accuratius inueſtigauero. Praeterea vero etiam tot diuerſa motuum genera in huiusmodi corporibus locum habere poſſunt, quae accuratiorem enucleationem poſtulant; quamobrem hic operam dabo, vt vniuerſam huius rei diſquiſitionem ex primis principiis deducam, et clarius, quam quidem ante eſt factum, proponam. Imprimis autem omnia diuerſa motuum genera, quae quidem occurrere poſſunt, dilucide ſum expoſiturus. Quo igitur omnia fiant magis perſpicua, duo praemittam Lemmata, quorum altero ſtatus aequilibrii, altero vero motus virgarum vtcunque elaſticarum et a potentiis quibuscunque

que ſollicitatarum definietur; vbi quidem tam virgam quam potentias perpetuo in eodem plano ſitas eſſe aſſumo. Demonſtrationem autem horum lemmatum non addo, quoniam eam alio loco iam dedi, atque adeo etiam ad eos caſus, quibus motus non fit in eodem plano, accommodaui.

Lemma I.

Tab. II. Fig. 3. §. 1. *Si virgae vtcunque elaſticae* E Y F *in ſingulis elementis potentiae quaecunque fuerint applicatae, ſtatum aequilibrii definire.*

Solutio.

Referatur virga ad axem fixum O V, et pro eius puncto quocunque Y ſtatuantur coordinatae orthogonales $OX = x$ et $XY = y$, portio autem virgae $EY = s$, vt ſit $ds^2 = dx^2 + dy^2$; tum vero elementi $Yy = ds$ ſit maſſa $= S\,ds$, ac in eodem loco elaſticitas abſoluta $= V$, ita vt, poſito radio oſculi $= r$, vis, ſeu potius momentum elaſticitatis ſit $= \frac{V}{r}$; hincque, loco r ſubſtituta formula differentiali, iſtud momentum erit

$$= \frac{V(dy\,ddx - dx\,ddy)}{ds^3},$$

vbi ſcilicet nullum differentiale pro conſtanti eſt aſſumtum. Deinde omnes potentiae, quibus hoc elementum Yy ſollicitatur, reſoluantur ſecundum directiones coordinatarum, ac ponatur vis inde ſecundum directionem Y P reſultans $= P\,ds$ et ſecundum directionem $YQ = Q\,ds$: quibus poſitis pro ſtatu aequilibrii requiritur, vt ſit

$$\int dy \int P\,ds - \int dx \int Q\,ds = V\left(\frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{ds^3}\right).$$

Praeter

Praeterea vero tenſio, qua elementum Yy ſecundum tangentem antrorſum verſus E tenditur, erit

$$-\left(\frac{dx}{ds}\right)\int P\, ds - \left(\frac{dy}{ds}\right)\int Q\, ds.$$

Scholion.

§. 2. Hic aſſumſimus virgam in ſtatu naturali in directum eſſe extenſam, ita vt in hoc ſtatu radius oſculi vbique ſit infinitus. Sin autem virga naturaliter iam fuerit incuruata, et pro eius puncto Y radius oſculi ponatur $= \varrho$, tum, quia vis elaſticitatis eatenus tantum ſe exſerit, quatenus iſta curuatura in ſtatu naturali ſiue augetur ſiue diminuitur, pro ſtatu aequilibrii habebitur iſta aequatio:

$$\int dy \int P\, ds - \int dx \int Q\, ds = V\left(\frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{ds^3}\right) - \frac{V}{\varrho}.$$

Caeterum quia formulae integrales $\int P\, ds$ et $\int Q\, ds$ denotant ſummam omnium virium elementarium, portioni virgae $EY = s$ applicatarum, manifeſtum eſt, ſi virga in ipſo termino E a viribus finitis ſollicitetur, eas ſimul in his formulis integralibus comprehendi debere.

Lemma 2.

§. 3. *Si eadem virga elaſtica, quam deſcripſimus, quomodocunque ſuper eodem plano fuerit proiecta, eius motum inueſtigare, hoc eſt, eius ſitum et figuram ad quoduis tempus definire.*

Solutio.

Maneant igitur omnes denominationes, vt modo ſunt conſtitutae, atque elapſo tempore $= t$ (perpetuo in minu-

tis ſecundis exprimendo) teneat virga figuram in tabula repraeſentatam, ita vt portioni EY $= s$ reſpondeant coordinatae OX $= x$ et XY $= y$, quae, quia cum tempore continuo variantur, hic tanquam functiones duarum variabilium s et t ſpectari debent. Hinc igitur colligantur formulae $\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)$ et $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, quibus vncinulis ( ) indicatur, in vtraque differentiatione ſolum tempus t variabile eſſe aſſumtum, arcum vero s pro conſtante eſſe habitum. Hinc iam ex viribus elementaribus, virgae in ſingulis punctis applicatis, formentur ſequentes valores:

$$P' = P - \frac{S}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) \text{ et } Q' = Q - \frac{S}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right),$$

vbi g denotat altitudinem lapſus grauium in vno minuto ſecundo; atque ex his ſtatus virgae pro hoc tempore iſthac exprimetur aequatione:

$$\int dy \int P' ds - \int dx \int Q' ds = V\left(\frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{ds^2}\right) - \frac{V}{\varrho},$$

ſi quidem virga in ſtatu naturali iam ita fuerit incuruata, vt eius puncto Y conueniat radius osculi ϱ; vnde ſi virga fuerit naturaliter recta, ob $\varrho = \infty$ terminus poſtremus $\frac{V}{\varrho}$ omitti poterit. Denique, quod ad tenſionem in ſingulis punctis attinet, erit ſimili modo quo ſupra tenſio in y verſus E vergens

$$-\left(\frac{dx}{ds}\right)\int P' ds - \left(\frac{dy}{ds}\right)\int Q' ds.$$

His igitur formulis, ſi quidem eas euoluere licuerit, totus virgae motus determinabitur.

Problema I.

Tab. II. Fig. 4. §. 4. *Si virga datae longitudinis* EF, *naturaliter recta et vbique tam aequaliter craſſa quam aequaliter elaſti.a*

ſtica vtcunque contremiſcat, aequationem inuenire, qua omnes motus, qui in virga locum habere poſſunt, contineantur.

Solutio.

Referat igitur E F virgam noſtram in ſtatu naturali conſtitutam, cuius longitudo ſit $EF = a$, eiusque craſſities $= cc$, ita vt eius volumen ſit acc; ac per talia volumina tam maſſas quam vires ſollicitantes exprimamus, ita vt, ſi dicamus quampiam vim eſſe $= b^3$, ea tanta ſit intelligenda, quantum foret pondus eiusdem materiae, ex qua virga conſtat, ſub volumine b^3 contentum. Hinc ſi in virga capiatur portio $EX = x = s$, quandoquidem in vibrationibus minimis arcus s perpetuo abſciſſae x aequari poteſt, elementi $Xx = ds$ maſſula erit $= cc\,ds$, ita vt, quod ſupra vocavimus S, hic nobis ſit $= cc$. Tempore autem elapſo t, ob tremorem conceptum tranſierit punctum X in Y, poſito $XY = y$, et quia vibrationes quam minimae ſtatuuntur, iſta applicata y prae abſciſſa $EX = x$, ſiue arcu s, quaſi euaneſcet; ſicque idem punctum x alium motum habere nequit, niſi in directione applicatae XY; vnde motus ſecundum directionem x erit nullus, ideoque $\frac{ddx}{dt^2} = 0$; atque hinc ob $ddx = 0$, radius oſculi erit

$$\frac{ds^3}{-dx\,ddy} = -\frac{ds^2}{ddy};$$

praeterea vero erit $\varrho = \infty$. Quod autem ad elaſticitatem abſolutam attinet, ea pro ſimilibus virgis recte quadrato craſſitiei reputatur proportionalis, ita vt ſit V vt c^4; vnde ſtatuamus $V = bc^4$, vbi b denotat quantitatem ab indole materiae virgae pendentem, et quia $\frac{V}{r}$ momentum

virium exhibet, vis autem nobis per volumen denotatur, formula $\frac{V}{r}$ quatuor dimenſiones lineares complecti debet; vnde patet, literam b certam longitudinem referre.

Quia porro virgam a nullis viribus elementaribus vrgeri ſtatuimus, erit tam $P = 0$ quam $Q = 0$. Interim tamen, ſi ſumamus virgam in termino E duas ſuſtinere vires, alteram in directione $EF = E$, alteram vero in directione $Ef = F$, fieri debebit

$$\int P\,ds = E \text{ et } \int Q\,ds = F.$$

Cum igitur ob $S = cc$ poni oporteat

$$P' = P - \frac{cc}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = P, \text{ ob } \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = 0,$$

fit $\int P'\,ds = E$; tum vero erit

$$Q' = Q - \frac{cc}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right), \text{ hincque porro}$$

$$\int Q'\,ds = F - \frac{cc}{2g}\int ds\left(\frac{ddy}{dt^2}\right).$$

His igitur valoribus ſubſtitutis aequatio pro motu virgae induet hanc formam:

$$Ey - Fx + \frac{cc}{2g}\int dx \int ds\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{bc^4\,ddy}{ds^2}.$$

Pro tenſione autem, qua punctum y verſus E tenditur, habebimus $-E - \left(\frac{dy}{ds}\right)\int Q'\,ds$, vbi, quia $\frac{dy}{ds}$ quaſi euaneſcit, tenſio ſimpliciter erit $-E$, vnde caſu quo $E = 0$ tenſio vbique etiam erit nulla.

Differentiemus igitur aequationem pro motu inventam, ſumto ſolo elemento $ds = dx$ conſtante, fietque

$$E\,dy - F\,dx + \frac{cc}{2g}\,ds\int ds\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{bc^4\,d^3y}{ds^2}$$

et per ds diuidendo

$$\frac{E\,dy}{ds} - F + \frac{cc}{2g}\int ds\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{bc^4\,d^3y}{ds^3};$$

haec

haec aequatio denuo differentiata ac per ds diuiſa praebebit iſtam:

$$\frac{E\,ddy}{ds^2} + \frac{cc}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{bc^4\,d^4y}{ds^4},$$

quae, quo diſcrimen inter binas variabiles s et t clarius ob oculos ponatur, more ſolito ita repraeſentetur:

$$E\left(\frac{ddy}{ds^2}\right) + \frac{cc}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -bc^4\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right).$$

Corollarium I.

§. 5. Quod ſi ergo virga a nullis plane viribus externis extendatur, ita vt ſit $E = 0$, aequatio motum virgae determinans erit

$$\frac{cc}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -bc^4\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right), \text{ ſiue}$$

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -bcc\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right),$$

ita vt totum negotium huc ſit reductum, quemadmodum iſta aequatio differentialis quarti gradus integrari queat; vbi quidem in limine confiteri cogimur, eius integrale nullo adhuc modo inueniri potuiſſe, ita vt contenti eſſe debeamus in ſolutiones particulares inquirere.

Corollarium II.

§. 6. Sin autem accedat vis litera E indicata, eius duo caſus perpendendi occurrunt: prouti virga ab ea vel extenditur vel comprimitur. Talis enim virga, quatenus eſt rigida, etiam vires ſuſtinere poteſt, quae ipſam comprimere conantur, cuiusmodi vires eo maiores eſſe poſſunt, quo maior fuerit elaſticitas; ſi enim eſſet perfecte flexilis, nulla plane vis comprimens admitti poſſet, vnde pro quouis elaſticitatis gradu indagandum erit, quantam vim comprimentem ſuſtinere valeat, antequam incurue-

 curue-

curuetur, quam quidem quaeſtionem iam olim ſolutam dedi, vbi vires, quas columnae ſuſtentare valent, ſum perſcrutatus. Quod autem ad alteram vim extendentem attinet, ab ea virga, quaſi eſſet chorda perfecte flexilis, extendi poterit. Concipiatur ſcilicet eius termino E filum ſeu chorda alligata, quae per foraminulum *o* fulcri immobilis *m n* traducta circa trochleam T certum pondus P habeat appenſum. Hoc igitur modo virga non ſolum ob propriam elaſticitatem, ſed etiam ob pondus tendens P motum tremulum concipiet, vnde ſonum edet mixtum ſeu medium quendam inter ſonum virgae elaſticae proprium et ſonum chordae tenſae.

Tab. II. Fig. 5.

Corollarium III.

§. 7. Ponamus igitur huiusmodi vim tendentem eſſe $= cch$, et quia in plagam contrariam dirigitur, erit $E = -cch$, vnde pro iſto motu habebimus ſequentem aequationem:

$$-h\left(\frac{ddy}{ds^2}\right) + \frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -bcc\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right),$$

quae ergo aequatio, ſi fuerit $b = 0$, quo caſu elaſticitas euaneſcit, motum chordae perfecte flexilis exprimet; erit enim

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = h.\left(\frac{ddy}{ds^2}\right),$$

quemadmodum contra, ſi $h = 0$, orietur ſonus virgae elaſticae proprius, fietque

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -bcc\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right);$$

et ſi caſus ex vtroque fuerit mixtus, habebimus

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = h.\left(\frac{ddy}{ds^2}\right) - bcc\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right).$$

Scho-

Scholion.

§. 8. Quoniam igitur vires ſecundum ipſam virgae directionem agentes, quibus ea vel extenderetur vel comprimeretur, ad aequationem finalem magis complicatam perducunt, eas in hac tractatione penitus remoueamus, et noſtras inueſtigationes ad eos tantum motus reſtringamus, quos virga, ſiue a nullis viribus ſollicitata, ſiue a talibus tantum, quae in virgae directionem normaliter agunt, quas ſupra litera F deſignauimus, recipere poteſt. Ipſam vero virgam hic perpetuo naturaliter rectam et per totam longitudinem vbique aequaliter craſſam et aequaliter elaſticam ſtatuamus, easdem denominationes retinentes, quae hactenus ſunt deſcriptae. At quia aequatio finalis per duplicem differentiationem eſt orta, etiam praecedentes aquationes, quae ad eam deduxerunt, conſideraſſe iuuabit, quae ſunt:

$$\text{I.}\ -Fx + \frac{cc}{2g}\int dx \int ds \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -bc^4\left(\frac{ddy}{ds^2}\right).$$

$$\text{II.}\ -F + \frac{cc}{2g}\int ds \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -bc^4\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right).$$

$$\text{III.}\ \frac{cc}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -bc^4\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right),\ \text{ſiue}\ \frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -bcc\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right),$$

vbi in priores adhuc vis F, qua virga normaliter vrgeri poteſt, ingreditur, cuius ratio erit habenda, quando virga non omnino eſt libera, ſed in vno pluribusue punctis quaſi ope ſtyli eſt fixa, circa quem tamen ſit mobilis; vnde ſtatim intelligitur, virgam infinitis modis per tales ſtylos affigi poſſe, quibus eius motus diuerſimode temperetur; quos diuerſos caſus in ſequentibus accuratius euoluemus.

Proble-

Problema II.

§. 9. *Cum virga noſtra infinitis modis contremiſcere queat, eos caſus in genere inueſtigare, quibus eius motus vibratorius euadet regularis, ſeu minimis oſcillationibus penduli cuiuspiam ſimplicis conformis.*

Solutio.

Ponamus igitur longitudinem iſtius penduli ſimpliplicis $= k$, atque vt motus virgae pari modo peragatur, neceſſe eſt vt ſit $\frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{y}{k}$; in qua aequatione cum ſolum tempus t pro variabili habeatur, longitudo vero s vt conſtans ſpectetur, per duplicem integrationem pervenitur ad iſtam formulam generalem:

$$y = M\,\text{ſin.}\,(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}),$$

vbi quantitas, M non ſolum eſt conſtans, ſed etiam functionem quamcunque ipſius s deſignare poteſt. Cum igitur per aequationem finalem ſit

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -bcc\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right),$$

erit etiam $bcc\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right) = \frac{y}{k}$; in qua aequatione ſola quantitas s pro variabili aſſumitur, cuius ergo integrale inueſtigari oportet. Quod quo facilius fieri poſſit ponamus breuitatis gratia $bcck = f^4$, vt remotis clauſulis iam ſit $y = \frac{f^4\,d^4y}{ds^4}$, cui ſatisfieri poſſe euidens eſt huiusmodi valore: $y = e^{\lambda s}$. Quia enim hinc fit

$$\frac{dy}{ds} = \lambda e^{\lambda s},\quad \frac{ddy}{ds^2} = \lambda\lambda e^{\lambda s},\quad \frac{d^3y}{ds^3} = \lambda^3 e^{\lambda s},\quad \frac{d^4y}{ds^4} = \lambda^4 e^{\lambda s},$$

his ſubſtitutis prodit iſta aequalitas: $1 = \lambda^4 f^4$, ſiue

$\lambda^4 =$

$\lambda^4 = \frac{1}{f^4}$, vnde ſequentes quatuor valores pro litera λ eliciuntur, ſcilicet:

$$1^o.\ \lambda = \frac{1}{f};\ 2^o.\ \lambda = -\frac{1}{f};\ 3^o.\ \lambda = \frac{\sqrt{-1}}{f};\ 4^o.\ \lambda = -\frac{\sqrt{-1}}{f},$$

quibus valoribus inuentis conſtat, eos etiam vtcunque combinatos ſatisfacere, ita vt ſtatuere queamus

$$y = \alpha e^{\frac{s}{f}} + \beta e^{\frac{-s}{f}} + \gamma e^{\frac{s\sqrt{-1}}{f}} + \delta e^{-\frac{s\sqrt{-1}}{f}},$$

quae forma, cum quatuor contineat conſtantes arbitrarias, vtique continet integrale completum noſtrae aequationis. Notum autem eſt bina poſteriora membra imaginaria reduci ad ſinum et coſinum anguli realis $\frac{s}{f}$. Hinc igitur multiplicando per communem factorem N, qui, ob tempus t conſtans aſſumtum, pro functione temporis quacunque haberi poteſt, habebimus

$$y = N\left(\alpha e^{\frac{s}{f}} + \beta e^{\frac{-s}{f}} + \gamma \operatorname{ſin.} \frac{s}{f} + \delta \operatorname{coſ.} \frac{s}{f}\right);$$

qui ergo valor ante inuento $y = M \operatorname{ſin.} (\zeta + t\sqrt{\frac{2g}{k}})$ aequalis reddi debet, id quod facillime praeſtabitur ſtatuendo:

$$N = C \operatorname{ſin.} (\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}) \text{ et}$$

$$M = C\left(\alpha e^{\frac{s}{f}} + \beta e^{\frac{-s}{f}} + \gamma \operatorname{ſin.} \frac{s}{f} + \delta \operatorname{coſ.} \frac{s}{f}\right),$$

ſic enim vterque valor reducetur ad iſtam aequationem:

$$y = C\left(\operatorname{ſin.}(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}})\right)\left(\alpha e^{\frac{s}{f}} + \beta e^{\frac{-s}{f}} + \gamma \operatorname{ſin.} \frac{s}{f} + \delta \operatorname{coſ.} \frac{s}{f}\right),$$

vbi iam literae C, α, β, γ, δ, cum angulo ζ denotant veras quantitates conſtantes pro arbitrio accipiendas; quomodocunque autem accipiantur motus virgae ſemper ita erit comparatus, vt congruat cum oſcillationibus penduli

 ſimpli-

ſimplicis, cuius longitudo eſt $=k$, vnde tempus cuiusque vibrationis erit $=\pi\sqrt{\frac{k}{2g}}$, expreſſum in minutis ſecundis, hincque porro numerus vibrationum vno minuto ſecundo editarum erit $=\frac{\sqrt{2g}}{\pi\sqrt{k}}$, qui numerus etiam pro menſura ſoni, quem chorda edet, haberi ſolet.

Corollarium 1.

§. 10. Formulae illae exponentiales, perinde ac ſinus et coſinus, commode per ſeries infinitas exhiberi poſſunt, quae ita ſe habebunt:

$$y=C\sin.\left(\zeta+t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}\right)\begin{cases}\alpha\left(1+\frac{s}{f}+\frac{ss}{1.2ff}+\frac{s^3}{1.2.3f^3}+\frac{s^4}{1.2.3.4f^4}+\text{etc.}\right.\\+\beta\left(1-\frac{s}{f}+\frac{ss}{1.2ff}-\frac{s^3}{1.2.3f^3}+\frac{s^4}{1.2.3.4f^4}+\text{etc.}\right.\\+\gamma\left(\qquad\frac{s}{f}\qquad\qquad-\frac{s^3}{1.2.3f^3}\qquad\qquad+\text{etc.}\right.\\+\delta\left(1\qquad-\frac{ss}{1.2ff}\qquad\qquad+\frac{s^4}{1.2.3.4f^4}-\text{etc.}\right.\end{cases}$$

Hinc igitur, ſi breuitatis gratia ponamus

$y=C\sin.(\zeta+t\sqrt{\frac{2g}{k}})S$, erit per ſeriem infinitam

$$\begin{aligned}S=&(\alpha+\beta+\delta)\,1+(\alpha-\beta+\gamma)\frac{s}{f}\\&+(\alpha+\beta-\delta)\frac{ss}{1.2ff}+(\alpha-\beta-\gamma)\frac{s^3}{1.2.3f^3}\\&+(\alpha+\beta+\delta)\frac{s^4}{1.2.3.4f^4}+(\alpha-\beta+\gamma)\frac{s^5}{1.2.3.4.5f^5}+\text{etc.}\end{aligned}$$

Hae igitur ſeries eo magis conuergent, quo maior fuerit quantitas f prae arcu s; vbi recordemur eſſe $f=\sqrt[4]{bcck}$, ita vt ſimul longitudinem penduli ſimplicis k in ſe complectatur.

Corollarium 2.

§. 11. Inuento valore ipſius y, eius quoque valores per differentiationem eruti aſſignari poſſunt: reperietur autem

autem

$$\left(\frac{dy}{ds}\right) = \frac{C}{f} \sin.\left(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}\right)\left(\alpha e^{\frac{s}{f}} - \beta e^{\frac{-s}{f}} + \gamma \cos.\tfrac{s}{f} - \delta \sin.\tfrac{s}{f}\right)$$

$$\left(\frac{ddy}{ds^2}\right) = \frac{C}{ff} \sin.\left(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}\right)\left(\alpha e^{\frac{s}{f}} + \beta e^{\frac{-s}{f}} - \gamma \sin.\tfrac{s}{f} - \delta \cos.\tfrac{s}{f}\right)$$

$$\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right) = \frac{C}{f^3} \sin.\left(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}\right)\left(\alpha e^{\frac{s}{f}} - \beta e^{\frac{-s}{f}} - \gamma \cos.\tfrac{s}{f} + \delta \sin.\tfrac{s}{f}\right)$$

$$\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right) = \frac{C}{f^4} \sin.\left(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}\right)\left(\alpha e^{\frac{s}{f}} + \beta e^{\frac{-s}{f}} + \gamma \sin.\tfrac{s}{f} + \delta \cos.\tfrac{s}{f}\right)$$

Corollarium 3.

§. 12. Quod ſi autem tantum tempus t variabile accipiamus, ipſum motum cognoſcemus, quo ſingulae virgae ciebuntur; namque celeritas, qua virgae punctum X in directione X Y mouetur, eſt $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, quae ergo per valorem inuentum erit

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{C\sqrt{2g}}{\sqrt{k}} \cos.\left(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}\right)\left(\alpha e^{\frac{s}{f}} + \beta e^{\frac{-s}{f}} + \gamma \sin.\tfrac{s}{f} + \delta \cos.\tfrac{s}{f}\right);$$

et quia incrementum celeritatis, per elementum temporis dt diuiſum, praebet accelerationem, erit ea

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{2Cg}{k} \sin.\left(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}\right)\left(\alpha e^{\frac{s}{f}} + \beta e^{\frac{-s}{f}} + \gamma \sin.\tfrac{s}{f} + \delta \cos.\tfrac{s}{f}\right);$$

ex quibus formulis perſpicitur, quomodo omnibus conditionibus praeſcriptis ſatisfiat.

Scholion 1.

§. 13. Quanquam igitur hic tantum motus vibratorios regulares contemplamur: tamen ob ingentem quantitatum conſtantium arbitrariarum numerum infinita varietas locum habere poteſt, prouti iſtae conſtantes aliter atque aliter determinantur. In hoc autem negotio imprimis

mis ad ſtatum virgae eſt reſpiciendum, vtrum ea perfecte ſit libera et nullis plane viribus coerceatur, an vero alicubi ſit fixa vel ope vnius pluriumue ſtylorum. Statim enim ac virgae ſtatus fuerit definitus, etiam conſtantium α, β, γ, δ, ratio non ſolum perfecte determinatur, ſed etiam obtinebitur aequatio, ex qua valorem quantitatis f determinare licebit, hincque igitur ipſa penduli ſimplicis longitudo k elicietur. Praecipue autem in hoc negotio ad totam virgae longitudinem $EF = a$, cuius hactenus nulla ratio eſt habita, reſpici oportet. Quod ſi autem nullas alias vires F admittamus, niſi quae virgae in vtroque termino ſint applicatae, ſtatus vtriusque termini triplex occurrere poteſt, quos igitur caſus hic euoluere conueniet; vbi quod de termino E definiemus ſimul pro altero F intelligi debet.

I. Primus igitur caſus eſto, quo virgae terminus E plane eſt liber et a nulla vi coercetur; tum igitur poſito $s = 0$, tribus aequationibus ſupra (§. 8.) memoratis ſatisfieri oportet, vnde, quia vis $F = 0$ et vtrumque integrale

$$\int ds \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) \text{ et } \int ds \int ds \left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$$

perpetuo ita accipi ſupponitur, vt evaneſcat poſito $s = 0$, ex prima pro termino E, vbi $s = 0$, oportet eſſe $\left(\frac{ddy}{ds^2}\right) = 0$; ex ſecunda autem aequatione naſcitur iſta conditio: $\left(\frac{d^3 s}{ds^3}\right) = 0$, ita vt hic ſtatus duas determinationes poſtulet.

II. Secundus caſus eſto, quo virgae terminus E ope ſtyli ita figitur, vt circa eum libere moueri poſſit; quo ergo caſu vis quaedam F ſtylum retinens aderit. Primum igitur, quia terminus E in ſuo loco fixus detinetur, poſito $s = 0$, hoc caſu fieri debet $y = 0$; praeterea vero prima memo-

memoratarum aequationum ſupeditat hanc conditionem: $(\frac{ddy}{ds^2}) = 0$; ſecunda aequatio determinabit ipſam vim

$$F = + b c^4 (\frac{d^3 y}{ds^3}),$$

quam autem noſſe parum nobis refert, quia in motum vibratorium non influit; ſicque iſte caſus etiam duas continet determinationes, ſcilicet:

$$y = 0 \text{ et } (\frac{ddy}{ds^2}) = 0;$$

hunc igitur vocemus ſimpliciter fixum.

III. Tertius caſus eſto, quo terminus virgae E ita muro quaſi eſt infixus, vt hoc loco non moueri ſed tantum incuruari queat. Hoc igitur caſu manifeſtum eſt, poſito $s = 0$ non ſolum fieri debere $y = 0$, ſed etiam $(\frac{dy}{ds}) = 0$, quia in hoc termino tangens in ipſum axem incidere debet; hunc autem caſum vocemus infixum.

Cum igitur hi ſinguli caſus binas determinationes inuoluant, ſi etiam ad alterum terminum F reſpiciamus, pro quo habebimus $x = s = a$, quicunque caſus in vtroque locum habeant, ſemper inde quatuor orientur determinationes, quibus non ſolum conſtantes illae $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ definientur, ſed inſuper aequatio reſultabit, ex qua ipſam quantitatem f, hincque pendulum ſimplex k aſſignare licebit.

Scholion 2

§. 14. Cum igitur pro vtroque termino E et F terni caſus locum habere queant, hinc omnino ſex caſus diuerſi naſcuntur, quos ordine reſolui conueniet, ſi quidem hoc argumentum in omni extenſione pertractare voluerimus; hos igitur ſex caſus ſequenti modo deſignabimus:

I. Terminus E liber;		terminus F liber
II. - - - - E liber;	- - - - - - -	F ſimplic. fixus
III. - - - E liber;	- - - - - - -	F infixus
IV. - - - E ſimpliciter fixus;	- - -	F ſimplic. fixus
V. - - - E ſimpliciter fixus;	- - -	F infixus
VI. - - - E infixus;	- - - - - -	F infixus.

Plures quidem caſus videntur occurrere, veluti ſi E eſſet fixus et F liber; ſed quia ambos terminos inter ſe permutare licet, hic caſus in illis memoratis ſex iam continetur. His igitur poſitis ſex nobis ſuperſunt Problemata, quae breuiter ordine pertractabimus.

Euolutio caſus I.
quo virgae elaſticae vterque terminus prorſus eſt liber.

Problema.

§. 15. *Si virga elaſtica a nullis plane viribus ſollicitetur et plano horizontali poliriſſimo libere incumbat, inveſtigare omnes vibrationes regulares, quibus ea contremiſcere poteſt.*

Solutio.

Quoniam vterque terminus E et F liber aſſumitur, pro vtroque erit tam $(\frac{ddy}{ds^2}) = 0$ quam $(\frac{d^3 s}{ds^3}) = 0$, hinc ergo pro termino E poſito $s = 0$ naſcuntur hae duae aequationes:

I. $\alpha + \beta - \delta = 0$; II. $\alpha - \beta - \gamma = 0$;

pro altero termino F erit $s = a$, et poſito breuitatis gratia $\frac{a}{f} = \omega$, iſtae oriuntur aequationes:

III.

$$\text{III. } \alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} - \gamma \text{ ſin. } \omega - \delta \text{ coſ. } \omega = 0;$$
$$\text{IV. } \alpha e^{\omega} - \beta e^{-\omega} - \gamma \text{ coſ. } \omega + \delta \text{ ſin. } \omega = 0.$$

Iam ex duabus prioribus colligitur $\delta = \alpha + \beta$ et $\gamma = \alpha - \beta$, qui valores in duabus poſterioribus ſubſtituti praebent:

$$\text{III. } \alpha(e^{\omega} - \text{ſin.}\,\omega - \text{coſ.}\,\omega) + \beta(e^{-\omega} + \text{ſin.}\,\omega - \text{coſ.}\,\omega) = 0;$$
$$\text{IV. } \alpha(e^{\omega} + \text{ſin.}\,\omega - \text{coſ.}\,\omega) - \beta(e^{-\omega} - \text{ſin.}\,\omega - \text{coſ.}\,\omega) = 0;$$

vnde duplici modo concluditur:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{-e^{-\omega} - \text{ſin.}\,\omega + \text{coſ.}\,\omega}{e^{\omega} - \text{ſin}\,\omega - \text{coſ.}\,\omega} = \frac{e^{-\omega} - \text{ſin.}\,\omega - \text{coſ.}\,\omega}{e^{\omega} + \text{ſin.}\,\omega - \text{coſ.}\,\omega}.$$

Statuamus hic breuitatis gratia $\text{ſin.}\,\omega + \text{coſ.}\,\omega = p$ et $\text{ſin.}\,\omega - \text{coſ}\,\omega = q$, vt habeamus

$$\frac{-e^{-\omega} - q}{e^{\omega} - p} = \frac{e^{-\omega} - p}{e^{\omega} + q};$$

vnde deducitur haec aequatio:

$$-1 - qq - qe^{\omega} - qe^{-\omega} = 1 + pp - pe^{\omega} - pe^{-\omega}, \text{ ſiue}$$
$$2 + pp + qq + (q-p)e^{\omega} + (q-p)e^{-\omega} = 0.$$

Cum igitur ſit

$$pp + qq = 2 \text{ et } q - p = -2\,\text{coſ.}\,\omega, \text{ erit}$$
$$2 - \text{coſ.}\,\omega\,(e^{\omega} + e^{-\omega}) = 0, \text{ hincque}$$
$$\text{coſ.}\,\omega = \frac{2}{e^{\omega} + e^{-\omega}};$$

quocirca totum negotium huc eſt reductum, vt ex iſta aequatione valores literae ω eliciantur, vbi quidem ſtatim apparet, valorem $\omega = 0$ ſatisfacere; quia autem hinc oritur $f = \infty$, hincque etiam k infinitum, hoc caſu virga nullum plane motum concipiet, ſed in quiete perſeuerabit. Pro reliquis autem valoribus, quotcunque fuerint inuenti, habe-

bimus

bimus $f = \frac{a}{\omega}$, hincque $k = \frac{a^4}{bcc\omega^4}$; tum vero erit

$$\sqrt{\frac{2g}{k}} = \frac{c\,\omega\,\omega\sqrt{2bg}}{aa};$$

quocirca tempus vnius vibrationis erit $= \frac{\pi aa}{\omega\omega c\sqrt{2gb}}$, hincque ipſe ſonus a virga editus $= \frac{\omega\omega c\sqrt{2gb}}{\pi aa}$. Denique cum ſit

$$\text{coſ.}\,\omega = \frac{2}{e^{\omega} + e^{-\omega}},\ \text{erit ſin.}\,\omega = \frac{+(e^{\omega} - e^{-\omega})}{e^{\omega} + e^{-\omega}};$$

ex priore autem valore, quo ſinus ω eſt poſitiuus, erit

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1 - e^{-2\omega} - e^{\omega} + e^{-\omega}}{-1 + e^{2\omega} - e^{\omega} + e^{-\omega}},\ \text{hincque}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}e^{\omega} = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega} - e^{2\omega} + 1}{-e^{\omega} + e^{-\omega} + e^{2\omega} - 1} = -1,$$

ita vt ſit $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{-1}{e^{\omega}} = -e^{-\omega}$; altero autem caſu quo ſinus ω eſt negatiuus, reperitur $\frac{\alpha}{\beta} = +\frac{1}{e^{\omega}} = +e^{-\omega}$; quare ſi ſumamus $\alpha = 1$, erit $\beta = \mp e^{\omega}$, hincque $\gamma = 1 \pm e^{\omega}$ et $\delta = 1 \mp e^{\omega}$, vbi ſigna ſuperiora valent, ſi ſin. ω eſt poſitiuus, inferiora ſi negatiuus. His igitur valoribus inuentis aequatio pro motu virgae perfecte eſt determinata, quae quo ſimplicius repraeſentetur, notetur, ob $f = \frac{a}{\Phi}$ eſſe $\frac{s}{f} = \frac{s}{\omega}$; vnde ſi ponatur breuitatis gratia $\frac{s}{a} = \omega$, vt ſit $\frac{s}{f} = u\,\omega$, hoc valore poſito aequatio noſtra pro motu erit:

$$y = C\,\text{ſin.}\left(\zeta + t\,\frac{\omega\omega c\sqrt{2gb}}{aa}\right)\left(e^{u\omega} \mp e^{\omega(1-u)} + (1 \pm e^{\omega})\,\text{ſin.}\,u\omega + (1 \mp e^{\omega})\,\text{cſ.}\,u\omega\right)$$

ex qua ad quoduis tempus t ſtatus virgae elaſticae cognoſcitur, ſi modo valor literae ω rite fuerit definitus.

Corol-

Corollarium 1.

§. 16. Cum igitur ω denotet arcum circuli, cuius radius eſt $= 1$, in primo quadrante haud difficulter perſpicitur, poſt caſum $\omega = 0$ nullum alium angulum ſatisfacere; ſemper enim erit coſ. $\omega < \frac{2}{e^{\omega} + e^{-\omega}}$, quod ita oſtendi poteſt. Cum ſit per ſeries

$$\text{coſ.}\,\omega = 1 - \frac{\omega\omega}{1.2} + \frac{\omega^4}{1.2.3.4} - \frac{\omega^6}{1\ldots 6} + \text{etc. et}$$

$$e^{\omega} + e^{-\omega} = 2\left(1 + \frac{\omega\omega}{1.2} + \frac{\omega^4}{1.2.3.4} + \frac{\omega^6}{1\ldots\ldots 6} + \text{etc. erit}\right.$$

$$\text{coſ.}\,\omega\,(e^{\omega} + e^{-\omega}) = 2\left(1 - \frac{\omega^4}{6}\right),$$

qui valor manifeſto minor eſt quam 2, niſi valor ipſius ω angulum rectum ſuperet.

Corollarium 2.

§. 17. Deinde manifeſtum eſt, neque in ſecundo neque in tertio quadrante reperiri valorem ipſius ω, quia in his quadrantibus coſinus ſunt negatiui, formula autem $\frac{2}{e^{\omega} + e^{-\omega}}$ ſemper eſt poſitiua. At in quarto quadrante, vbi coſinus iterum fiunt poſitiui, dabitur valor non multum tres angulos rectos ſuperans. Sit igitur ϱ ſignum anguli recti, ſiue $\varrho = \frac{\pi}{2}$, ac ponatur $\omega = 3\varrho + \Phi$, fietque coſ. $\omega =$ ſin. Φ, vnde fieri debet ſin. $\Phi = \frac{2}{e^{3\varrho + \Phi} + e^{-3\varrho - \Phi}}$; vbi facile perſpicitur, angulum Φ valde eſſe paruum, quia numerus $e^{3\varrho}$, ob $3\varrho = 4,71239$ et $e = 2,71828$, eſt ſatis magnus, ſcilicet proxime $= 111,31$, pro quo ſcribamus n. Iam quia ſin. $\Phi = \Phi$, proxime, $e^{\Phi} = 1 + \Phi$ et $e^{-\Phi}$

$= 1 - \Phi$, noſtra aequatio erit

$$\Phi = \frac{2n}{nn(1+\Phi)+1-\Phi}, \text{ ſiue } \Phi = \frac{2n}{nn+1} \text{ proxime;}$$

ſumi igitur circiter poterit $\Phi = \frac{2}{n} = \frac{1}{56}$; vnde patet angulum Φ vix vnum gradum ſuperare, ita vt ſit $\omega = 3\varrho + 1^{\circ}$ circiter.

Corollarium 3.

§. 18. Progrediamur ad quintum quadrantem, et manifeſtum eſt hic iterum dari valorem tantillo minorem quam 5ϱ; defectus enim aliquot minuta prima non excedet. Porro vero ſextus et ſeptimus vacui manebant; in octavo autem reperietur $\omega = 7\varrho$, tam prope vt exceſſus ſentiri nequeat; ſicque valores vlteriores erunt continuo exactius $\omega = 9\varrho$, $\omega = 11\varrho$, etc.

Corollarium 4.

§. 19. Quod ſi ergo in primo valore exiguum diſcrimen vnius gradus negligamus, omnes valores anguli ω erunt 3ϱ, 5ϱ, 7ϱ, 9ϱ, 11ϱ, etc. qui ſecundum numeros impares in infinitum progrediuntur, vnde noſtra virga infinitos ſonos ſimplices edere poterit, qui ſequentibus numeris exprimentur:

$$\frac{9\varrho c\sqrt{2gb}}{2aa};\ \frac{25\varrho c\sqrt{2gb}}{2aa};\ \frac{49\varrho c\sqrt{2gb}}{2aa};\ \frac{81\varrho c\sqrt{2gb}}{2aa};\ \text{etc.}$$

qui ergo ſoni ſecundum numeros, 9, 25, 49, 81 etc. progrediuntur, quorum primus pro fundamentali haberi poteſt; proximus vero ad hunc rationem tenebit vt 25 : 9, quod interuallum complectitur vnam octauam cum tritono. Vnde ſi ſonus fundamentalis fuerit G, ſequens futurus erit *cis*, qui ergo ſonus ſimul auditus valde ingratam diſſonantiam referet.

Scho-

Scholion 1.

§. 20. Quodſi igitur pro ſingulis iſtis valoribus anguli ω formentur valores ipſius y, eorum quotcunque inuicem coniuncti exhibebunt motus, quos noſtra virga recipere poterit. Si hoc modo omnes infiniti valores ipſius ω inuicem coniungantur, ac pro quolibet literis C et ζ generatim quicunque alii valores tribuantur, aequatio obtinebitur generalis, quae omnes plane motus, qui in virga locum habere poſſunt, in ſe complectatur. Haec igitur aequatio generalis, ſi valores anguli ω per ω, ω′, ω″, etc. deſignemus, ſequentem habebit formam:

$$y = C\,\text{ſin.}\left(\zeta + t\frac{\omega\omega c\sqrt{2gb}}{aa}\right)$$
$$\left(e^{u\omega} \mp e^{\omega(1-u)} + (1 \pm e^{\omega})\,\text{ſin.}\,u\omega + (1 \mp e^{\omega})\,\text{coſ.}\,u\omega\right)$$
$$+ C'\,\text{ſin.}\left(\zeta' + t\frac{\omega'\omega' c\sqrt{2gb}}{aa}\right)$$
$$\left(e^{u\omega'} \mp e^{\omega'(1-u)} + (1 \pm e^{\omega'})\,\text{ſin.}\,u\omega' + (1 \mp e^{\omega'})\,\text{coſ.}\,u\omega'\right)$$
$$+ C''\,\text{ſin.}\left(\zeta'' + t\frac{\omega''\omega'' c\sqrt{2gb}}{aa}\right)$$
$$\left(e^{u\omega''} \mp e^{\omega''(1-u)} + (1 \pm e^{\omega''})\,\text{ſin.}\,u\omega'' + (1 \mp e^{\omega''})\,\text{coſ.}\,u\omega''\right).$$

etc. etc. etc.

vbi litera u denotat fractionem $\frac{s}{a}$, et ſigna ſuperiora valent ſi angulorum ω, ω′, ω″ ſinus fuerint poſitiui, inferiora vero ſi fuerint negatiui.

Scholion 2.

§. 21. Quod ſi ſonum fundamentalem, quo eſt proxime ω = 3 ϱ, et qui continet motum ſimpliciſſimum, quo virga contremiſcere poteſt, attentius conſideremus, facile colligere licet, curuam, quam virga inter vibrandum induit, axem ad minimum in duobus punctis ſecare debere,

 ita,

ita vt quaſi duos nodos formet. Si enim axem nusquam ſecaret, dum ſingula eius puncta ab axe recedunt, eodem motu continuo vlterius recedere deberent, quia virga a nullis plane viribus coercetur; quod inde etiam perſpicuum eſt, quod hoc caſu centrum grauitatis virgae immotum eſſe debet. Si porro virga in motu ſuo vnicum nodum formaret, circa quem quaſi gyraretur, motum ſemel conceptum gyratorium perpetuo conſeruare deberet. Hinc igitur patet, virgam inter vibrandum eiusmodi formam e I o M f eſſe habituram, quae ſitum naturalem, ſeu axem E F in duobus punctis L, M ſecet. Hoc idem vero etiam noſtra formula declarat: quia enim angulus ω hic ſubito tres angulos rectos ſuperat, anguli $u\,\omega$, ſiue $\frac{\omega s}{a}$, dum quantitas s vsque ad a augetur, angulos referenta o vsque ad $3\,\varrho$ continuo aſcendentes, quorum ſinus et coſinus interea bis contraria ſigna recipiunt, vnde duobus caſibus contingere poteſt, vt applicata y euaneſcat. Eodem modo intelligere licet, pro ſecundo ipſius ω valore $= 5\,\varrho$ curuam virgae tres nodos habere debere, pro ſequente, $\omega = 7\,\varrho$, quatuor, et ita porro. Singuli autem iſti nodi ſiue interſectiones cum axe E F pro quouis valore ipſius ω ex hacc aequatione elici poterunt:

Tab. II. Fig. 6.

$$e^{u\,\omega} + e^{\omega(1-u)} + (1 \pm e^{\omega})\,\text{ſin.}\,\omega u + (1 \mp e^{\omega})\,\text{coſ.}\,\omega u = 0$$

quippe ex qua valores literae $u = \frac{s}{a}$ ipſos nodos declarabunt. Scilicet literae u, incipiendo a o, continuo maiores tribuantur valores vsque ad 1, et caſus notentur, quibus iſta formula euaneſcit; ſi enim quispiam valor iam euadat valde paruus, per regulam approximationis veri eius valores facile deteguntur.

Scho-

Scholion 3.

§. 22. Quo haec clarius perſpiciantur, caſum primum, quo $\omega = 3\,\zeta$ circiter, ideoque eius ſinus negatiuus, accuratius perpendamus. Erit igitur, primo factore, conſtante ſeu a tempore pendente, omiſſo:

$y = - - - - e^{u\omega} + e^{\omega(1-u)} + (1 - e^{\omega})\,\text{ſin.}\,u\omega + (1 + e^{\omega})\,\text{coſ.}\,u\omega,$ cuius valores pro tribus caſibus $u = 0$, $u = 1$ et $u = \frac{1}{2}$ definiamus, vt applicatas non ſolum pro vtroque termino E et F, ſed etiam pro puncto medio O, ſcilicet $E\,e$, $F\,f$ et $O\,o$ obtineamus. Primo igitur, poſito $u = 0$ erit $E\,e = 2\,(1 + e^{\omega})$; poſito autem $u = 1$, prodit applicata

$$F\,f = e^{\omega} + 1 + (1 - e^{\omega})\,\text{ſin.}\,\omega + (1 + e^{\omega})\,\text{coſ.}\,\omega,$$

qui valor, ob ſin. $\omega = -1$ et coſ. $\omega = \frac{2}{e^{\omega} + e^{-\omega}}$, abit in hunc:

$F\,f = 2\,(1 + e^{\omega})$, ſicque hae duae applicatae $E\,e$ et $F\,f$ inter ſe erunt aequales; at pro puncto medio O, vbi fit $u = \frac{1}{2}$, hincque ſin. $\frac{1}{2}\omega = $ ſin. $\frac{3}{2}\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et coſ. $\frac{1}{2}\omega = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, erit applicata

$$O\,o = e^{\frac{\omega}{2}} + e^{\frac{\omega}{2}} + \frac{(1 - e^{\omega})}{\sqrt{2}} - \frac{(1 + e^{\omega})}{\sqrt{2}} = 2\,e^{\frac{\omega}{2}} - e^{\omega}\sqrt{2},$$

qui valor, ob $e^{\omega} = 111$ et $e^{\frac{\omega}{2}} = 10\frac{1}{2}$, abit in $21 - 111.\sqrt{2}$; vnde patet, hanc applicatam eſſe negatiuam, prorſus vti figura refert. Poſſumus etiam ſimili modo poſitionem tangentium pro his locis exhibere ex formula

$\left(\frac{dy}{ds}\right) = - - - e^{u\omega} - e^{\omega(1-u)} + (1 - e^{\omega})\,\text{coſ.}\,u\omega - (1 + e^{\omega})\,\text{ſin.}\,u\omega,$

quae formula, poſito $u = 0$, pro termino E praebet:

$$\left(\frac{dy}{ds}\right) = 1 - e^{\omega} + 1 - e^{\omega} = 2\,(1 - e^{\omega}) = -2\,(e^{\omega} - 1);$$

 tum

tum vero, poſito $u = 1$, pro termino F erit

$$\left(\frac{dy}{ds}\right) = e^{\omega} - 1 + (1 - e^{\omega}) \text{ coſ. } \omega - (1 + e^{\omega}) \text{ ſin. } \omega,$$

qui valor, ob coſ. $\omega = -1$ et ſin. $\omega = \frac{2}{e^{\omega}}$, reiecto termino $e^{-\omega}$, vtpote minimo, reducitur ad $\left(\frac{dy}{ds}\right) = 2(e^{\omega} - 1)$; vnde patet angulos E e L et F f M eſſe inter ſe aequales. Pro puncto autem medio O, vbi $u = \frac{1}{2}$, prodit

$$\left(\frac{dy}{ds}\right) = (1 - e^{\omega}) \text{ coſ. } \tfrac{1}{2}\omega - (1 + e^{\omega}) \text{ ſin. } \tfrac{1}{2}\omega = -\sqrt{2},$$

qui valor, ſi calculus accuratius inſtitueretur, prodiret $= 0$, ita vt tangens in puncto o axi ſit parallela. Simili prorſus modo etiam ſequentes caſus, vbi $\omega = 5\varrho$, vel 7ϱ, vel 9ϱ expendere licebit.

Euolutio caſus II.

Quo alter terminus liber relinquitur, alter vero, circa ſtylum mobilis, figitur.

Problema.

§. 23. *Si virga elaſtica in termino* E *fuerit libera, in altero vero* F *ſtylo affixa, circa quem tamen libere moveri poſſit, inueſtigare omnes vibrationes regulares, quibus ea contremiſcere poteſt.*

Solutio.

Quia ergo pro termino E, vbi $s = 0$, vt ante eſt $\left(\frac{ddy}{ds^2}\right) = 0$ et $\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right) = 0$, erit etiam vt ante $\alpha + \beta - \delta = 0$ et $\alpha - \beta - \gamma = 0$, vnde fit $\gamma = \alpha - \beta$ et $\delta = \alpha + \beta$. Pro altero autem termino ſimpliciter fixo, vbi $s = a$, poſito

ite-

iterum $\frac{a}{y} = \omega$, primo debet eſſe $y = 0$, tum vero etiam $\left(\frac{d\,d\,y}{d\,s^2}\right) = 0$. Prior conditio dat

$$\alpha\, e^{\omega} + \beta\, e^{-\omega} + \gamma\, \text{ſin.}\, \omega + \delta\, \text{coſ.}\, \omega = 0,$$

poſterior vero

$$\alpha\, e^{\omega} + \beta\, e^{-\omega} - \gamma\, \text{ſin.}\, \omega - \delta\, \text{coſ.}\, \omega = 0,$$

quae aequationes, loco γ et δ ſubſtitutis valoribus, abeunt in ſequentes:

$$\alpha(e^{\omega} + \text{ſin.}\,\omega + \text{coſ.}\,\omega) + \beta(e^{-\omega} - \text{ſin.}\,\omega + \text{coſ.}\,\omega) = 0 \text{ et}$$
$$\alpha(e^{\omega} - \text{ſin.}\,\omega - \text{coſ.}\,\omega) + \beta(e^{-\omega} + \text{ſin.}\,\omega - \text{coſ.}\,\omega) = 0;$$

vnde geminus valor oritur

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{(e^{-\omega} - \text{ſin.}\,\omega + \text{coſ.}\,\omega)}{e^{\omega} + \text{ſin.}\,\omega + \text{coſ.}\,\omega} = -\frac{(e^{-\omega} + \text{ſin.}\,\omega - \text{coſ.}\,\omega)}{e^{\omega} - \text{ſin.}\,\omega - \text{coſ.}\,\omega}.$$

Ponatur iterum $\text{ſin.}\,\omega + \text{coſ.}\,\omega = p$ et $\text{ſin.}\,\omega - \text{coſ.}\,\omega = q$, vt ſit

$$\frac{-e^{-\omega} + q}{e^{\omega} + p} = \frac{-e^{-\omega} - q}{e^{\omega} - p},$$

vnde colligitur haec aequatio:

$$-1 + p\,e^{-\omega} + q\,e^{\omega} - p\,q = -1 - q\,e^{\omega} - p\,e^{-\omega} - p\,q$$

ſiue $p\,e^{-\omega} + q\,e^{\omega} = 0$, vnde concluditur $\text{tang.}\,\omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{e^{\omega} + e^{-\omega}}$, quocirca habebimus, vel

$$\text{ſin.}\,\omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}} \text{ et } \text{coſ.}\,\omega = \frac{e^{\omega} + e^{-\omega}}{\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}}, \text{ vel}$$

$$\text{ſin.}\,\omega = \frac{-e^{\omega} + e^{-\omega}}{\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}} \text{ et } \text{coſ.}\,\omega = \frac{-e^{\omega} - e^{-\omega}}{\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}}.$$

Ex prioribus valoribus colligitur

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{-e^{-\omega}\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})} - 2\,e^{-\omega}}{e^{\omega}\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})} + 2\,e^{\omega}},$$

ideo-

ideoque $\frac{\alpha}{\beta} e^{2\omega} = -1$, vnde fit $\frac{\alpha}{\beta} = -e^{-2\omega}$. Poſteriore vero caſu colligetur

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{-e^{-\omega}\sqrt{2(e^{2\omega}+e^{-2\omega})}+2e^{-\omega}}{e^{\omega}\sqrt{2(e^{2\omega}+e^{-2\omega})}-2e^{\omega}} = \frac{-1}{e^{2\omega}} = -e^{-\omega}.$$

Vtroque ergo caſu, ſiue ſinus et coſinus anguli ω ſint ambo poſitiui, ſiue ambo negatiui, pro fractione $\frac{\alpha}{\beta}$ idem valor obtinetur. Quare ſi ponatur $\alpha = 1$, erit $\beta = -e^{2\omega}$, hincque $\gamma = 1 + e^{2\omega}$ et $\delta = 1 - e^{2\omega}$; quibus valoribus inuentis aequatio pro motu virgae, ſi iterum loco $\frac{s}{a}$ ſcribamus u, erit haec:

$$y = C\,\text{ſin.}(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}})(e^{u\omega} - e^{\omega(2-u)} + (1+e^{2\omega})\,\text{ſin.}\,u\omega + (1-e^{2\omega})\,\text{coſ.}\,u\omega).$$

Quicunque autem valores pro angulo ω ex aequatione

$$\text{tang.}\,\omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{e^{\omega} + e^{-\omega}}$$

eruantur, ex ſingulis habetur

$f = \frac{a}{\omega}$, hincque $f^4 = \frac{a^4}{\omega^4} = bcck$, vnde fit

$k = \frac{a^4}{bcc\omega^4}$ et $\frac{\sqrt{2g}}{k} = \frac{\omega\omega c\sqrt{2gb}}{aa}$,

hincque porro vt ante tempus vnius oſcillationis erit:

$\pi\sqrt{\frac{k}{2g}} = \frac{\pi aa}{\omega\omega c\sqrt{2gb}}$,

et ſonus a virga elaſtica editus $= \frac{\omega\omega c\sqrt{2gb}}{\pi aa}$. Totum ergo negotium huc eſt reductum, vt ex aequatione

$$\text{tang.}\,\omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{e^{\omega} + e^{-\omega}}$$

omnes valores anguli ω eruantur; vbi quidem ſtatim liquet, valorem $\omega = 0$ ſatisfacere, vnde autem nullus motus ſequitur; quare pro reliquis valoribus ſingulos quadrantes percurramus. Pro primo igitur quadrante per ſeries habebimus:

ſin. ω

$$\text{ſin.}\,\omega\,(e^{\omega}+e^{-\omega}) = 2\,\omega\,(1+\tfrac{1}{3}\,\omega\,\omega-\tfrac{1}{30}\,\omega^{4}) \text{ et}$$
$$\text{coſ.}\,\omega\,(e^{\omega}-e^{-\omega}) = 2\,\omega\,(1-\tfrac{1}{3}\,\omega\,\omega-\tfrac{1}{30}\,\omega^{4});$$

vnde patet, priorem formulam per totum primum quadrantem maiorem eſſe quam poſteriorem, ita vt in hoc quadrante nullus reperiatur valor pro angulo ω. In ſecundo autem quadrante, vbi omnes tangentes ſunt negatiui, nullus iterum dari poteſt, neque etiam in quarto, ſexto, octavo et omnibus paribus. Reliquos quadrantes in corollariis percurramus.

Corollarium I.

§. 24. Conſideremus igitur tertium quadrantem, vbi, cum ſit ω maius quam π, formula $\frac{e^{\omega}-e^{-\omega}}{e^{\omega}+e^{-\omega}}$ parum ab vnitate deficiet, vnde angulus ω aliquanto minor erit quam $\pi + 45°$. Hinc ſumto iterum ϱ pro ſigno anguli recti ſtatuamus $\omega = \pi + \frac{1}{2}\varrho - \Phi$, eritque

$$\text{tang. }\omega = \text{tang. }(\tfrac{1}{2}\varrho - \Phi) = \frac{1-\text{tang. }\Phi}{1+\text{tang. }\Phi}.$$

Cum igitur ſit

$$\frac{1-\text{tang. }\Phi}{1+\text{tang. }\Phi} = \frac{e^{\omega}-e^{-\omega}}{e^{\omega}+e^{-\omega}} = \frac{1-e^{-2\omega}}{1+e^{-2\omega}},$$

hinc manifeſto eſt $\text{tang. }\Phi = e^{-2\omega} = \frac{1}{e^{2\pi+\varrho-2\Phi}}$, in quo exponente angulum exiguum Φ negligere licet, ita vt ſubducto calculo reperiatur $\text{tang. }\Phi = \frac{1}{2576}$; ſicque angulus Φ vix vnum minutum ſuperat, id quod tuto negligi poteſt, ita vt primus valor ſit $\omega = \pi + \frac{1}{2}\varrho = 225°$, cuius tam ſinus quam coſinus eſt $= -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Corollarium 2.

§. 25. Pergamus igitur ad quartum quadrantem, vbi angulus ω multo minus diſcrepabit a $2\pi + 45°$. Hic autem tam ſinus quam coſinus erit $= + \frac{1}{\sqrt{2}}$. Simili modo ex ſeptimo quadrante nanciſcimur $\omega = 3\pi + \frac{1}{2}\varrho$, tam ſinu quam coſinu exiſtente $= - \frac{1}{\sqrt{2}}$; nonus vero quadrans ſuppeditat $\omega = 4\pi + \frac{1}{2}\varrho$; vndecimus $\omega = 5\pi + \frac{1}{2}\varrho$, et ita porro.

Corollarium 3.

§. 26. Cum igitur ſit $\varrho = \frac{\pi}{4}$, omnes valores pro angulo ω hactenus inuenti ſequenti modo progrediuntur:

$$1^{dus}\,\omega = \frac{5\pi}{4};\quad 2^{dus}\,\omega = \frac{9\pi}{4};\quad 3^{us}\,\omega = \frac{13\pi}{4};\quad 4^{tus}\,\omega = \frac{17\pi}{4},\ \text{etc.}$$

vnde omnes ſoni ſimplices, quos iſta virga edere poteſt, ſequentibus numeris exprimentur:

$$\frac{25\pi c\sqrt{2gb}}{16aa},\quad \frac{81\pi c\sqrt{2gb}}{16aa},\quad \frac{169\pi c\sqrt{2gb}}{16aa},\quad \frac{289\pi c\sqrt{2gb}}{16aa},$$

quorum primus fundamentalis cenſetur; vnde ſi ſecundus ſimul exaudiatur, erit primus ad ſecundum vt 25 ad 81 hoc eſt vt $1 : 3\frac{6}{25}$, ſeu proxime vt $1 : 3\frac{1}{4}$. Ergo ſi ſonus fundamentalis fuerit C, ſequens erit *gis*, quem tamen ſonum vno commate ſuperabit, ſicque harmonia parum grata exiſtet.

Corollarium 4.

§. 27. Cum hic ſonus fundamentalis, ceu grauiſſimus, quem virga haec edere poteſt, ſit $= \frac{25\pi c\sqrt{2gb}}{16aa}$, caſu autem

autem primo, quo vterque virgae terminus erat liber, ſonus fundamentalis repertus fuerit $= \frac{9\zeta c\sqrt{2gb}}{2aa} = \frac{9\pi c\sqrt{2gb}}{4aa}$, ille ſe habebit ad hunc vt 25 : 36, ita vt caſu primo eadem virga ſonum edat fere vna quinta acutiorem. Scilicet ſi ſonus caſu primo editus fuerit g, tum ſonus ſecundo caſu editus erit grauior *Cis*, quod interuallum a muſicis falſa quinta appellatur. Hic igitur vtique notari meretur, quod ſi virga vtrinque libera edat ſonum g, tum eadem virga altero termino ſimpliciter fixa ſubito editura ſit ſonum grauiorem *Cis*, id quod experientia facile comprobari poteſt.

Scholion 1.

§. 28. Inuentis igitur omnibus valoribus anguli ω, quos deſignemus per ω, ω', ω'', ω''', ω'''' etc. omnes motus irregulares, quos noſtra virga edere poteſt, per combinationem generaliſſimam formularum ex his valoribus natarum in ſequenti expreſſione continebuntur:

$$y = C\ \text{ſin.}\ (\zeta + t\,\tfrac{\omega\omega c\sqrt{2gb}}{aa})\,(e^{u\omega} - e^{\omega(2-u)} + (1 + e^{2\omega})$$
$$\text{ſin.}\ u\omega + (1 - e^{2\omega})\ \text{coſ.}\ u\omega)$$
$$+ C'\ \text{ſin.}\ (\zeta' + t\,\tfrac{\omega'\omega' c\sqrt{2gb}}{aa})\,(e^{u\omega'} - e^{\omega'(2-u)} + (1 + e^{2\omega'})$$
$$\text{ſin.}\ u\omega' + (1 - e^{2\omega'})\ \text{coſ.}\ u\omega')$$
$$+ C''\ \text{ſin.}\ (\zeta'' + t\,\tfrac{\omega''\omega''\sqrt{2gb}}{aa})\,(e^{u\omega''} - e^{\omega''(2-u)} + (1 + e^{2\omega''})$$
$$\text{ſin.}\ u\omega'' + (1 - e^{2\omega''})\ \text{coſ.}\ u\omega'').$$

Scholion 2.

§. 29. Examinemus etiam figuram, quam virga induet dum ſonum principalem purum reddit. Hunc in-

 finem

finem euoluamus expreſſionem pro applicata y inuentam, neglecto iterum factore conſtante ſeu a tempore pendente, atque habebimus

$$y = 1\,(e^{u\omega} + \text{ſin}\; u\,\omega + \text{coſ.}\, u\,\omega) - e^{2\omega}(e^{-u\omega} - \text{ſin.}\, u\,\omega + \text{coſ.}\, u\,\omega),$$

vbi iam vidimus, ob $\omega = \frac{5\pi}{4}$ eſſe $e^{2\omega} = 2576$; tum vero loco u ſumamus ſucceſſiue ſequentes valores:

$$u = 0,\; u = \tfrac{1}{5},\; u = \tfrac{2}{5},\; u = \tfrac{3}{5},\; u = \tfrac{4}{5},\; u = 1$$

vbi pro poſtremo caſu iam nouimus eſſe $y = 0$.

I. Sit igitur $u = 0$, ſiue $s = 0$, eritque

$$y = 2 - 2\, e^{2\omega} = -5150,$$

quae ergo eſt applicata pro termino E.

II. Sit $u = \frac{1}{5}$, ſiue $s = \frac{1}{5}\, a$, erit

$$y = (e^{\frac{1}{5}\omega} + \text{ſin.}\, \tfrac{1}{5}\omega + \text{coſ.}\, \tfrac{1}{5}\omega)$$
$$- e^{2\omega}(e^{-\frac{1}{5}\omega} - \text{ſin.}\, \tfrac{1}{5}\omega + \text{coſ.}\, \tfrac{1}{5}\omega).$$

Hic autem ob $\omega = \frac{5\pi}{4}$ erit

$$\tfrac{1}{5}\omega = \tfrac{\pi}{4} = 45^\circ \text{ et } e^{\frac{1}{5}\omega} = 2{,}1933 \text{ et}$$
$$e^{-\frac{1}{5}\omega} = 0{,}4559,$$

hincque fiet

$$y = 3{,}6075 - 2576 .\, 0{,}4559 = -1172.$$

III. Sit $u = \frac{2}{5}$ ſeu $s = \frac{2}{5}\, a$, erit

$$y = (e^{\frac{2}{5}\omega} + \text{ſin.}\, \tfrac{2}{5}\omega + \text{coſ.}\, \tfrac{2}{5}\omega)$$
$$- e^{2\omega}(e^{-\frac{2}{5}\omega} - \text{ſin.}\, \tfrac{2}{5}\omega + \text{coſ.}\, \tfrac{2}{5}\omega).$$ Iam ob

$\omega =$

$\omega = \frac{5\pi}{4}$ erit $\frac{2}{5}\omega = \frac{1}{2}\pi = 90°$ et

$$e^{\frac{2}{5}\omega} = 4,8104 \text{ et } e^{-\frac{2}{5}\omega} = 0,2079,$$

hincque colligitur:

$$y = 5,8104 + 2576.\,0,7921 = 0,2079.$$

IV. Sit nunc $u = \frac{3}{5}$, ſiue $s = \frac{3}{5}a$, eritque

$$y = (e^{\frac{3}{5}\omega} + \text{ſin.}\tfrac{3}{5}\omega + \text{coſ.}\tfrac{3}{5}\omega) - e^{2\omega}(e^{-\frac{3}{5}\omega} - \text{ſin.}\tfrac{3}{5}\omega + \text{coſ.}\tfrac{3}{5}\omega),$$

vbi eſt

$$\tfrac{3}{5}\omega = \tfrac{3}{4}\pi = 135°, \text{ ideoque}$$

$$e^{\frac{3}{5}\omega} = 10,550 \text{ et } e^{-\frac{3}{5}\omega} = 0,0948, \text{ hincque erit}$$

$$y = 10,550 + 2576.\,1,3194 = 3387.$$

V. Sit nunc $u = \frac{4}{5}$, ſeu $s = \frac{4}{5}\omega$, ac fiet

$$y = (e^{\frac{4}{5}\omega} + \text{ſin.}\tfrac{4}{5}\omega + \text{coſ.}\tfrac{4}{5}\omega) - e^{2\omega}(e^{-\frac{4}{5}\omega} - \text{ſin.}\tfrac{4}{5}\omega + \text{coſ.}\tfrac{4}{5}\omega)$$

et ob

$$\tfrac{3}{5}\omega = \pi = 180°,\ e^{\frac{4}{5}\omega} = 23,140 \text{ et } e^{-\frac{4}{5}\omega} = 0,0432$$

erit

$$y = 22,140 + 2576.\,0,9568 = 2487.$$

Talis igitur forma quam virga inter vibrandum recipiet in Tabula (fig. 7.) exhibetur, vbi neminem offendat magnitudo applicatarum, quippe quae per numerum quempiam praegrandem diuiſae ſunt intelligendae. Haec ergo curua non niſi vnicum habet nodum in puncto O, vnde ſatis tuto concludere licet, ſequentem curuam, quae ex valore $\omega = \frac{9\pi}{4}$ naſcitur, habituram eſſe duos nodos, ſequentem tres, et ita porro. Tab. II. Fig. 7.

Euolutio caſus III.

quo alter terminos liber, alter vero muro firmiter infixus ſtatuitur.

Problema.

§. 30. *Si virga elaſtica in termino* E *fuerit libera, in altero autem termino* F *quaſi muro infixa, inueſtigare omnes vibrationes regulares, quibus ea contremiſcere poteſt.*

Solutio.

Conditio ad terminum E pertinens ſtatim nobis praebet vt ante $\gamma = \alpha - \beta$ et $\delta = \alpha + \beta$; tum vero, poſito $s = a$ factoque $\frac{a}{f} = \omega$, debet eſſe tam $y = 0$, quam $\left(\frac{dy}{ds}\right) = 0$; vnde iſtas deducimus aequationes:

$$\alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} + \gamma \text{ ſin. } \omega + \delta \text{ coſ. } \omega = 0 \text{ et}$$

$$\alpha e^{\omega} - \beta e^{-\omega} + \gamma \text{ coſ. } \omega - \delta \text{ ſin. } \omega = 0,$$

in quibus ſi loco γ et δ valores inuenti ſubſtituantur, prodibunt ſequentes:

$$\alpha (e^{\omega} + \text{ſin.}\, \omega + \text{coſ.}\, \omega) + \beta (e^{-\omega} - \text{ſin.}\, \omega + \text{coſ.}\, \omega) = 0 \text{ et}$$

$$\alpha (e^{\omega} + \text{coſ.}\, \omega - \text{ſin.}\, \omega) - \beta (e^{-\omega} + \text{coſ.}\, \omega + \text{ſin.}\, \omega) = 0,$$

hincque duplici modo elicitur:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{-e^{-\omega} + \text{ſin.}\, \omega - \text{coſ.}\, \omega}{e^{\omega} + \text{ſin.}\, \omega + \text{coſ.}\, \omega} = \frac{e^{-\omega} + \text{coſ.}\, \omega + \text{ſin.}\, \omega}{e^{\omega} + \text{coſ.}\, \omega - \text{ſin.}\, \omega}.$$

Ponatur iterum, vti hactenus fecimus, $\text{ſin.}\, \omega + \text{coſ.}\, \omega = p$ et $\text{ſin.}\, \omega - \text{coſ.}\, \omega = g$, vt habeamus

$$\frac{-e^{-\omega} + q}{e^{\omega} + p} = \frac{e^{-\omega} + p}{e^{\omega} - q},$$

cuius

cuius aequationis reſolutio praebet

$$2 + (p - q)(e^{\omega} + e^{-\omega}) + pp + qq = 0,$$

vnde ob

$$pp + qq = 2 \text{ et } p - q = 2 \text{ coſ. } \omega \text{ reperitur}$$

$$\text{coſ. } \omega = \frac{-2}{e^{\omega} + e^{-\omega}},$$

vnde patet Coſinum anguli ω ſemper fore negatiuum, ideoque angulum ω in quadrantibus ſecundo et tertio, item ſexto et ſeptimo, item decimo et vndecimo, etc. quaeri debere. Ex cognito autem coſinu ω concluditur vel

$$\text{ſin. } \omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{e^{\omega} + e^{-\omega}}, \text{ vel ſin. } \omega = \frac{-e^{\omega} + e^{-\omega}}{e^{\omega} + e^{-\omega}},$$

quos duos caſus ſollicite a ſe inuicem diſtingui oportet. At ex priore caſu colligitur:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1 - e^{-2\omega} + e^{\omega} - e^{-\omega}}{-1 + e^{2\omega} + e^{\omega} - e^{-\omega}} = \frac{1}{e^{\omega}};$$

ex altero autem valore ipſius ſin. ω colligitur $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{1}{e^{\omega}}$.

Rite igitur his caſibus combinandis impetrabimus ſequentes valores:

$$\alpha = 1, \ \beta = \pm e^{\omega}, \ \gamma = 1 \mp e^{\omega} \text{ et } \delta = 1 \pm e^{\omega},$$

quibus ſubſtitutis aequatio pro hoc motu ſimplici erit

$$y = C \text{ ſin. } (\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}})$$

$$(e^{u\omega} \pm e^{\omega(1-u)} + (1 \mp e^{\omega}) \text{ ſin. } u\omega + (1 \pm e^{\omega}) \text{ coſ. } u\omega),$$

vbi, vt hactenus, denotat u fractionem $\frac{s}{a}$, denique erit vt ante

$$f = \frac{a}{\omega}, \ k = \frac{a^4}{bcc\omega^4}, \ \sqrt{\tfrac{2g}{k}} = \frac{\omega\omega c\sqrt{2gb}}{aa},$$

tempus

tempus vnius oſcillationis $= \frac{\pi a a}{\omega \omega c \sqrt{2 g b}}$ et ſonus editus $= \frac{\omega \omega c \sqrt{2 g b}}{\pi a a}$.

Valores anguli ω in corollariis inueſtigabimus.

Corollarium 1.

§. 31. Pro ſecundo quadrante ponamus $\omega = \varrho + \Phi$, vbi ϱ iterum eſt character anguli recti, eritque coſ. $\omega = -$ ſin. Φ, ita vt eſſe debeat

$$\text{ſin.}\,\Phi = \frac{2}{e^{\omega} + e^{-\omega}} = \frac{2}{e^{\varrho+\Phi} + e^{-\varrho-\Phi}},$$

vnde fieri debet

$$e^{\varrho+\Phi}\,\text{ſin.}\,\Phi + e^{-\varrho-\Phi}\,\text{ſin.}\,\Phi = 2.$$

Eſt vero per ſeries

$$e^{\varrho+\Phi} = e^{\varrho}(1 + \Phi + \tfrac{1}{2}\Phi\Phi + \tfrac{1}{6}\Phi^3) \text{ et}$$
$$e^{-\varrho-\Phi} = e^{-\varrho}(1 - \Phi + \tfrac{1}{2}\Phi\Phi - \tfrac{1}{6}\Phi^3);$$

quare cum ſit ſin. $\Phi = \Phi - \frac{1}{6}\Phi^3$, erit

$$e^{\varrho}(\Phi + \Phi\Phi + \tfrac{1}{3}\Phi^3) + e^{-\varrho}(\Phi - \Phi\Phi + \tfrac{1}{3}\Phi^3) = 2.$$

Hinc ſi altiores ipſius Φ poteſtates negligantur, erit

$$\Phi = \frac{2}{e^{\varrho} + e^{-\varrho}};$$ vbi notetur eſſe

$$e^{\varrho} = e^{\frac{1}{2}\pi} = 4,8104 \text{ et } e^{-\varrho} = 0,2079,$$

ita vt ſit

$$\text{ſin.}\,\Phi = \frac{2}{5,0183} = \frac{1}{2,5091}, \text{ hinc } \Phi = 23°, 29'.$$

Cum igitur ſit $\Phi = 0,3985$, admittamus etiam poteſtatem $\Phi\Phi$, eiusque loco ſcribamus $0,3985^2$, quo facto erit

$$\Phi = \frac{2}{e^{\varrho}\cdot 1,3985 + e^{-\varrho}\cdot 0,6015} = \frac{2}{6,8524} = \frac{1}{3,4262},$$

vnde

vnde ſit $\Phi = 16^\circ, 58'$. Hic autem angulus adhuc minor prodiret, ſi etiam cubi Φ^3 rationem haberemus: interim tamen haec methodus nimis eſt incerta, vt tantum vero proxime angulum Φ elicere queamus, vnde aliam methodum ingredi conuenit.

Corollarium 2.

§. 32. Quando angulus Φ, iam propemodum eſt cognitus, conuertatur is in minuta ſecunda, quorum numerus ſit n; hinc quaeratur idem arcus Φ in partibus radii, et cum ſit $\pi = 180^\circ = 648000''$, fiat vt $648000'' : \pi$, ita n'' ad arcum, qui ſit $= m$, eritque $m = \frac{n\pi}{648000}$, hincque

$$l\,m = l\,n - 5,3144251, \text{ ſiue } l\,m = l\,n + 4,6855749;$$

tum igitur erit $\Phi = m$, et eſſe oportet

$$\text{ſin.}\,\Phi = \frac{2}{e^{\varrho + m} + e^{-\varrho - m}}.$$

Hinc iam pro lubitu ſumatur aliquis valor pro Φ, multum a veritate abludens, verbi gratia $\Phi = 12^\circ$, eritque $n = 43200''$, vnde reperitur $m = 0,20944$. Cum ergo ſit

$$\varrho = \tfrac{\pi}{2} = 1,57079, \text{ erit } \varrho + m = 1,78023, \text{ hinc}$$

$$l\,e^{\varrho + m} = 1,78023 \cdot \times 0,43429 = 0,77314,$$

ſicque erit

$$e^{\varrho + m} = 5,9312 \text{ et } e^{-\varrho - m} = 0,1686;$$

quocirca debebit eſſe

$$\text{ſin. } 12^\circ = \frac{2}{6,0998} = \frac{1}{3,0499}; \text{ eſt vero}$$

$$l\,\text{ſin. } 12^\circ = 9,31788 \text{ et } l\,\frac{1}{3,0499} = 9,51572,$$

qui poſterior logarithmus quia nimis eſt magnus, ſignum eſt angulum Φ maiorem accipi debere. Medium inter hos

duos valores praebet $\Phi = 15° = \frac{\pi}{12}$, vnde ſtatim colligitur

$$m = 0,26180,\ \text{hinc}\ \varrho + m = 1,83259\ \text{et}$$
$$l\, e^{\varrho + m} = 1,83259 \cdot 0,43429 = 0,79405,\ \text{ergo}$$
$$e^{\varrho + m} = 6,22380\ \text{et}\ e^{-\varrho - m} = 0,16067,$$

conſequenter

$$\text{ſin.}\ 15° = \frac{2}{6,38447} = \frac{1}{3,19223};\ \text{eſt vero}$$
$$l\,\text{ſin.}\ 15° = 9,412996\ \text{et}\ l\frac{1}{3,19223} = 495905.$$

Si ergo pro ſin. Φ, medium inter hos valores accipiamus, reperietur $\Phi = 16°. 33$. Quia igitur ſuperius medium erat nimis paruum, etiam hoc erit aliquantillo nimis paruum, vnde ſatis tuto concludimus fore $\Phi = 16°. 45'$, id quod pro noſtro inſtituto ſufficit, eritque ergo

$$\omega = \varrho + 16°. 45' = 106°. 45',$$

ſiue erit proxime $\omega = \frac{3}{5}\pi$, ita vt ſonus hinc oriundus prodeat $= \frac{9\pi c \sqrt{2gb}}{25\, a a}$, qui eſt fundamentalis pro hoc caſu, et ſe habet ad fundamentalem caſus primi vt $\frac{9}{25}$ ad $\frac{9}{4}$, hoc eſt vt 4 ad 25, ſeu vt 1 ad $6\frac{1}{4}$, ita vt iſte ſonus ſit fere duabus octauis cum ſemiſſe grauior quam primo caſu; vnde
Tab. II. ſi ſonus iſte fuerit C, ſonus primi caſus ſit $\overline{gis}$, ſonus
Fig. 8. autem ſecundi caſus $\overline{\overline{d}}$. Hunc autem motum figura octaua repraeſentat.

Corollarium 3.

§. 33. In tertio quadrante reperiemus ſecundum ſonum, ponendo $\omega = 3\varrho - \Phi$, vnde fit

$$\text{ſin.}\ \Phi = \frac{2}{e^{3\varrho - \Phi} + e^{-3\varrho + \Phi}},$$

et

et quia angulus Φ negligi poteſt, hinc ſequitur, vti ſupra §. 17, angulum Φ vix vnum gradum ſuperare, ita vt pro noſtro inſtituto penitus negligi queat. Sequentes vero valores ipſius ω erunt 5ϱ, 7ϱ, 9ϱ, etc. ita vt ſoni ex omnibus his valoribus oriundi ſint:

$$\frac{9\pi c\sqrt{2gb}}{4aa},\ \frac{25\pi c\sqrt{2gb}}{4aa},\ \frac{49\pi c\sqrt{2gb}}{4ba},\ \frac{81\pi c\sqrt{2gb}}{4aa},\ \text{etc.}$$

vnde patet, poſt ſonum fundamentalem ſequentes omnes prorſus conuenire cum iis, quos eadem virga caſu primo edebat.

Scholion.

§. 34. Quodſi iam omnes valores anguli ω deſignentur per ω, ω', ω'', ω''' etc., et loco $\frac{s}{a}$ ſcribatur u, aequatio generalis, omnes plane ſonos ſeu motus mixtos complectens, erit

$$\begin{aligned} y = {} & C \text{ ſin.} \left(\zeta + t\frac{\omega\omega c\sqrt{2gb}}{aa}\right) \\ & \left(e^{u\omega} \pm e^{\omega(1-u)} + (1 \mp e^{\omega}) \text{ ſin.}\, u\omega + (1 \pm e^{\omega}) \text{ coſ.}\, u\omega\right) \\ + {} & C' \text{ ſin.} \left(\zeta' + t\frac{\omega'\omega' c\sqrt{2gb}}{aa}\right) \\ & \left(e^{u\omega'} \pm e^{\omega'(1-u)} + (1 \mp e^{\omega'}) \text{ ſin.}\, u\omega' + (1 \pm e^{\omega}) \text{ coſ.}\, u\omega'\right) \\ + {} & C'' \text{ ſin.} \left(\zeta'' + t\frac{\omega''\omega'' c\sqrt{2gb}}{aa}\right) \\ & \left(e^{u\omega''} \pm e^{\omega''(1-u)} + (1 \mp e^{\omega''}) \text{ ſin.}\, u\omega'' + (1 \pm e^{\omega''}) \text{ coſ.}\, u\omega''\right) \\ & \qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

vbi ſignorum ambiguorum ſuperiora valent pro iis angulis ω, ω', ω'', quorum ſinus ſunt poſitiui, inferiora autem pro negatiuis.

Euolutio caſus IV.

quo virgae vterque terminus ſimpliciter ſtylo eſt fixus.

Problema.

§. 35. *Si virgae elaſticae tam terminus* E *quam* F *ſimpliciter fuerit fixus, inueſtigare omnes motus, quibus ea contremiſcere poteſt.*

Solutio.

Poſito igitur tam $s = 0$ quam $s = a$, vtroque caſu fieri oportet et $y = 0$ et $(\frac{ddy}{ds^2}) = 0$; ex priore caſu hae deducuntur aequationes:

$$1^\circ)\ \alpha + \beta + \delta = 0, \text{ et } 2^\circ)\ \alpha + \beta - \delta = 0,$$

ex quibus ſtatim colligitur

$$\alpha + \beta = 0 \text{ et } \delta = 0, \text{ ideoque } \beta = -\alpha.$$

Alter vero caſus, quo $s = a$, ponendo $\frac{a}{f} = \omega$, has ſuppeditat aequationes:

$$3^\circ)\ \alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} + \gamma \text{ ſin. } \omega + \delta \text{ coſ. } \omega = 0 \text{ et}$$

$$4^\circ)\ \alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} - \gamma \text{ ſin. } \omega - \delta \text{ coſ. } \omega = 0,$$

quae, ſuperioribus valoribus ſubſtitutis, reducuntur ad has:

$$\alpha (e^{\omega} - e^{-\omega}) + \gamma \text{ ſin. } \omega = 0 \text{ et } \alpha (e^{\omega} - e^{-\omega}) - \gamma \text{ ſin. } \alpha \omega = 0,$$

quarum ſumma praebet

$$2 \alpha (e^{\omega} - e^{-\omega}) = 0, \text{ ideoque } \alpha = 0,$$

differentia vero dat $2 \gamma \text{ ſin. } \omega = 0$, vnde ſi ſumeremus $\gamma = 0$, tota virga in quiete eſſet manſura; neceſſe igitur

eſt

eſt vt ſit ſin. $\omega = 0$. Hinc ergo ſtatim innoteſcunt omnes valores pro angulo ω, quippe qui ſunt:

$$\omega = 0,\ \omega = \pi,\ \omega = 2\pi,\ \omega = 3\pi,\ \omega = 4\pi \text{ etc.}$$

quorum primus locum habet in ſtatu quietis, ſecundus autem ſonum fundamentalem hoc caſu exhibet, ex quo, vt in praecedentibus caſibus, oriuntur ſequentes ſoni:

$$\frac{\pi c\sqrt{2gb}}{aa},\ \frac{4\pi c\sqrt{2gb}}{aa},\ \frac{9\pi c\sqrt{2gb}}{aa},\ \frac{16\pi c\sqrt{2gb}}{aa} \text{ etc.}$$

qui igitur ſoni ſecundum numeros quadratos 1, 4, 9, 16 aſcendunt, ita vt, ſi fundamentalis fuerit C, iſti ſoni conſtituant hanc ſeriem: C, $\bar{c}$, $\bar{\bar{d}}$, $\bar{\bar{\bar{c}}}$, $\overline{\overline{\overline{gis}}}$, $\bar{\bar{\bar{\bar{d}}}}$, etc. Quod ſi ergo omnes iſtos motus generaliter coniungamus, formula generalis, omnes plane motus, quos virga noſtra recipere poteſt, complectens, erit

$$y = C\,\text{ſin.}\left(\zeta + t\frac{\pi\pi c\sqrt{2gb}}{aa}\right)\text{ſin.}\,\pi u + C'\,\text{ſin.}\left(\zeta' + t\frac{4\pi\pi c\sqrt{2gb}}{aa}\right)\text{ſin.}\,2\pi u$$
$$+ C''\,\text{ſin.}\left(\zeta'' + t\frac{9\pi\pi c\sqrt{2bg}}{aa}\right)\text{ſin.}\,3\pi u + C'''\,\text{ſin.}\left(\zeta''' + t\frac{16\pi\pi c\sqrt{2gb}}{aa}\right)\text{ſin.}\,4\pi u$$
$$+ \text{ etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

vbi ſcripſimus u loco $\frac{s}{a}$.

Corollarium 1.

§. 36. Quando ergo virga ſonum edit fundamentalem, eandem recipiet curuaturam quam chordae ſimpliciter vibrantes, quippe quae erit linea ſinuum, qualem figura prima refert. Pro ſono autem ſimplici ſecundo, quo $\omega = 2\pi$, figura chordae erit (fig. 2), habens vnum nodum in medio O. Pro ſequentibus autem ſonis ſimplicibus numerus nodorum ſemper vnitate augetur. Tab. III. Fig. 1.

Corollarium 2.

§. 37. Quodſi ſonos fundamentales omnium horum quatuor caſuum, quos hactenus tractauimus, inter ſe comparemus, iam vidimus, ſi ſonus primi caſus exprimatur per $\overline{gis}$, pro ſecundo caſu eum fore $\overline{d}$, ac pro tertio C, qui ſoni his numeris exprimuntur: $\frac{9}{4}$, $\frac{25}{16}$, $\frac{9}{25}$. Hinc cum praeſenti caſu quarto ſonus fundamentalis exprimatur vnitate, ſonus erit *fis*; ſeriem igitur hoc modo referamus:

I. $\frac{9}{4}$.	II. $\frac{25}{16}$.	III. $\frac{9}{25}$.	IV. 1.
$\overline{gis}$	$\overline{d}$	C	*fis*

Scholion.

§. 38. Hic igitur caſus, quo vterque virgae terminus ſimpliciter eſt fixus, prae reliquis hac inſigni gaudet praerogatiua, quod omnes valores anguli ω accurate ſine vllo errore definire licuit, propterea quod formulae exponentiales, quae hanc determinationem turbabant et non parum irregularem reddebant, penitus ex calculo euanuerunt; vnde ſoni hoc caſu editi multo magis ad harmoniam ſunt accommodati, et quidem adhuc magis quam in chordis ſimplicibus vſu venit. Cum enim ſoni ab eadem chorda editi ſecundum numeros 1, 2, 3, 4 etc. progrediantur, fere ſemper plures horum ſonorum ſimul audiuntur, inter quos etiam non parum diſſoni occurrere poſſunt. Verum quia a noſtra virga alii ſoni edi non poſſunt, niſi qui numeris 1, 4, 9, 16, 25 exprimuntur, praeter fundamentalem potiſſimum exaudietur eius duplex octaua, harmoniam nihil turbans, poſtea vero ſequetur ſonus numero 9 reſpondens, qui, cum funda-

menta-

mentalem vltra tres octauas ſuperet, ob nimium acumen vix vnquam audietur, ita vt tantum duplex octaua ſimul cum fundamentali tinniat. Talis igitur virga ſonos multo puriores reddere eſt cenſenda quam chordae ſimplices, vnde etiam ſoni hoc modo editi in muſica peculiarem ſuauitatem habere debebunt.

Euolutio caſus V.

quo virgae elaſticae alter terminus ſimpliciter eſt fixus, alter vero quaſi muro firmiter infixus.

Problema.

§. 39. *Si virgae elaſticae terminus* E *fuerit ſimpliciter fixus, alter vero* F *prorſus infixus, inueſtigare omnes motus, quibus ea contremiſcere poteſt.*

Solutio.

Quia terminus E, vbi fit $s = 0$, ſimpliciter eſt fixus, habebimus ſtatim, vti in caſu praecedente, $\beta = -\alpha$ et $\delta = 0$; pro altero autem termino, vbi $s = a$, erit tam $y = 0$ quam $\left(\frac{dy}{ds}\right) = 0$, vnde poſito $\frac{a}{f} = \omega$ oriuntur hae duae aequationes:

$$\alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} + \gamma \operatorname{ſin.} \omega + \delta \operatorname{coſ.} \omega = 0,$$

$$\alpha e^{\omega} - \beta e^{-\omega} + \gamma \operatorname{coſ.} \omega - \delta \operatorname{ſin.} \omega = 0,$$

quae, ſubſtitutis praecedentibus valoribus, abeunt in has:

$$\alpha (e^{\omega} - e^{-\omega}) + \gamma \operatorname{ſin.} \omega = 0 \text{ et}$$

$$\alpha (e^{\omega} + e^{-\omega}) + \gamma \operatorname{coſ.} \omega = 0.$$

Ex

Ex priore fit

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{-\text{ſin.}\,\omega}{e^{\omega} - e^{-\omega}}, \text{ ex altera vero } \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{-\text{coſ.}\,\omega}{e^{\omega} + e^{-\omega}};$$

ex quibus porro colligitur $\text{tang.}\,\omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{e^{\omega} + e^{-\omega}}$, quae formula plane conuenit cum ea, quam caſu ſecundo inuenimus, eritque idcirco, vt ibi, vel

$$\text{ſin.}\,\omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}} \text{ et coſ.}\,\omega = \frac{e^{\omega} + e^{-\omega}}{\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}}, \text{ vel}$$

$$\text{ſin.}\,\omega = \frac{-e^{\omega} + e^{-\omega}}{\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}} \text{ et coſ.}\,\omega = \frac{-e^{\omega} - e^{-\omega}}{\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}}.$$

Ex prioribus valoribus elicitur $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{-1}{\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}}$, ex alteris autem valoribus fit $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{+1}{\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}}$; vnde his binis caſibus coniungendis habebimus $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = \mp \sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}$ et $\delta = 0$; vbi vt hactenus ſignorum ambiguorum ſuperius valet, ſi anguli ω tam ſinus quam coſinus fuerint poſitiui, inferius autem ſi ambo fuerint negatiui, vnde pro quouis valore ω habebitur

$$y = C\,\text{ſin.}\left(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}\right)\left(e^{u\omega} - e^{-u\omega} \mp \sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}\,\text{ſin.}\,u\omega\right);$$

praeterea vero vt hactenus erit $\frac{\sqrt{2g}}{k} = \frac{\omega\omega c\sqrt{2gb}}{aa}$, tempus vnius oſcillationis $= \frac{\pi aa}{\omega\omega c\sqrt{2gb}}$ et ſonus editus $= \frac{\omega\omega c\sqrt{2gb}}{\pi aa}$.

Corollarium 1.

§. 40. Quia aequatio reſoluenda: $\text{tang.}\,\omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{e^{\omega} + e^{-\omega}}$ prorſus conuenit cum ea, quam caſu ſecundo iam reſoluimus

mus omnes valores anguli ω erunt, vt ibi, ſequentes:

$$\omega = \frac{5\pi}{4},\ \frac{9\pi}{4},\ \frac{13\pi}{4},\ \frac{17\pi}{4},\ \text{etc.}$$

vnde etiam omnes ſoni ſimplices, quos haec virga edere poteſt, ſequentibus numeris exprimentur:

$$\frac{25\pi c\sqrt{2gb}}{16aa};\ \frac{81\pi c\sqrt{2gb}}{16aa};\ \frac{169\pi c\sqrt{2gb}}{16aa};\ \frac{289\pi c\sqrt{2gb}}{16aa};\ \text{etc.}$$

quorum primus etiam pro fundamentali habetur, et ſecundum ſuperiorem determinationem reſpondet claui $\overline{d}$ (vide §. 32.)

Corollarium 2.

§. 41. Quanquam autem hic caſus eosdem plane ſonos ſimplices producit, quos caſu ſecundo inuenimus, tamen ipſa virga maxime diuerſas recipit figuras. Ita pro ſono fundamentali, vbi $\omega = \frac{5\pi}{4}$, ideoque tam ſinus quam coſinus ſunt negatiui, ſcilicet ſin. $\omega =$ coſ. $\omega = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, omiſſo coefficiente erit

$$y = - - - - e^{u\omega} - e^{-u\omega} + \sqrt{2}\,(e^{2\omega} + e^{-2\omega})\ \text{ſin.}\ u\omega,$$

qui valor pro vtroque termino $u = 0$ et $u = 1$ fit $= 0$. Pro reliqua figura cognoſcenda, quia ſupra iam vidimus eſſe $e^{2\omega} = e^{\frac{5}{2}\pi} = 2576$, erit $\sqrt{2}\,(e^{2\omega} + e^{-2\omega}) = 72$, proxime. Tribuamus igitur literae u ſequentes valores: $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, et pro ſingulis ſequentes valores ipſius y prodibunt:

I. Si $u = \frac{1}{5}$, erit $u\omega = \frac{\pi}{4} = 45°$ et $y = 1,7374 + \frac{72}{\sqrt{2}} = 53$ proxime;
II. Sit $u = \frac{2}{5}$, erit $u\omega = \frac{\pi}{2} = 90°$ et $y = 4,6025 + 72 = 76$ proxime;
III. Si $u = \frac{3}{5}$, erit $u\omega = \frac{3\pi}{4} = 135°$ et $y = 10,46 + \frac{72}{\sqrt{2}} = 61$ proxime; Tab. III. Fig. 3.
IV. Sit $u = \frac{4}{5}$, erit $u\omega = \pi = 180°$ et $y = 23,10 + 0 = 23$ proxime.
Iſta figura repraeſentatur per figuram tertiam.

Scholion.

§. 42. Vt iam omnes plane motus ex inuentis ſimplicibus concinne repraeſentemus, pro formula irrationali $\sqrt{2(e^{2\omega}+e^{-2\omega})}$ ſcribamus characterem Ω, cui pro variis valoribus ω, ω', ω'', ω''' etc. tribuamus valores Ω, Ω', Ω'', Ω''' etc. et ſcribendo, vt hactenus, u loco $\frac{s}{a}$, aequatio generalis erit:

$$\begin{aligned} y = {} & C \text{ ſin.} \left(\zeta + \tfrac{\omega\omega c\sqrt{2gb}}{aa} t\right)\left(e^{\omega} - e^{-\omega} \mp \Omega \text{ ſin. } u\,\omega\right) \\ & + C' \text{ ſin.} \left(\zeta' + \tfrac{\omega'\omega'\sqrt{2gb}}{aa} t\right)\left(e^{\omega'} - e^{-\omega'} \mp \Omega' \text{ ſin. } u\,\omega'\right) \\ & + C'' \text{ ſin.} \left(\zeta'' + \tfrac{\omega''\omega''\sqrt{2gb}}{aa} t\right)\left(e^{\omega''} - e^{-\omega''} \mp \Omega'' \text{ ſin. } u\,\omega''\right) \\ & + C''' \text{ ſin.} \left(\zeta''' + \tfrac{\omega'''\omega'''\sqrt{2gb}}{aa} t\right)\left(e^{\omega'''} - e^{-\omega'''} \mp \Omega''' \text{ ſin. } u\,\omega'''\right) \\ & \quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

vbi ſignum ſuperius valet pro angulis ω, ω', ω'' etc. quorum ſinus et coſinus ſunt poſitiui, inferius autem vbi ſunt negatiui.

Euolutio caſus VI.

quo virgae elaſticae vterque terminus firmiter quaſi muro eſt infixus.

Problema.

§. 43. *Si virgae elaſticae vterque terminus firmiter fuerit infixus, inueſtigare motus, quibus ea contremiſcere poteſt.*

Solutio.

Hoc igitur caſu pro vtroque termino debet eſſe tam $y = 0$ quam $\left(\frac{dy}{ds}\right) = 0$; pro priore termino ergo habebi-

bebimus has aequationes:

$$\alpha + \beta + \delta = 0 \text{ et } \alpha - \beta + \gamma = 0,$$

vnde conſequimur $\delta = -\alpha - \beta$ et $\gamma = -\alpha + \beta$; poſterior vero, quo $s = a$ et $\frac{a}{f} = \omega$, praebet

$$\alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} + \gamma \text{ ſin. } \omega + \delta \text{ coſ. } \omega = 0 \text{ et}$$

$$\alpha e^{\omega} - \beta e^{-\omega} + \gamma \text{ coſ. } \omega - \delta \text{ ſin. } \omega = 0;$$

vbi ſi priores valores ſubſtituantur, orientur hae aequationes:

$$\alpha (e^{\omega} - \text{ſin. } \omega - \text{coſ. } \omega) + \beta (e^{-\omega} + \text{ſin. } \omega - \text{coſ. } \omega) \text{ et}$$

$$\alpha (e^{\omega} - \text{coſ. } \omega + \text{ſin. } \omega) - \beta (e^{-\omega} - \text{coſ. } \omega - \text{ſin. } \omega);$$

vnde duplici modo colligitur

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{-e^{-\omega} - \text{ſin. } \omega + \text{coſ. } \omega}{e^{\omega} - \text{ſin. } \omega - \text{coſ. } \omega} = \frac{e^{-\omega} - \text{ſin. } \omega - \text{coſ. } \omega}{e^{\omega} + \text{ſin. } \omega - \text{coſ. } \omega},$$

qui valores cum prorſus conueniant cum iis, quos caſu primo ſumus nacti, inde etiam ſequitur fore coſ. $\omega = \frac{2}{e^{\omega} + e^{-\omega}}$; ſicque etiam omnes valores anguli ω iidem erunt, qui primo caſu iam ſunt exhibiti, ſcilicet $\omega = \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$, etc. vnde etiam iſta virga eosdem edet ſonos, qui erunt:

$$\frac{9\pi c\sqrt{2gb}}{4aa};\ \frac{25\pi c\sqrt{2gb}}{4aa};\ \frac{49\pi c\sqrt{2gb}}{4aa};\ \frac{81\pi c\sqrt{2gb}}{4aa};\ \text{etc.}$$

Praeterea vero etiam erit ſin. $\omega = \pm \frac{(e^{\omega} - e^{-\omega})}{e^{\omega} + e^{-\omega}}$, vbi ſignum ſuperius valet pro caſibus vbi ſinus eſt poſitiuus, inferius ſi negatiuus; vnde porro obtinemus $\alpha = 1$, $\beta = \mp e^{\omega}$, hincque porro $\gamma = -(1 \pm e^{\omega})$ et $\delta = -(1 \mp e^{\omega})$. Aequatio igitur pro motu a caſu primo in eo tantum differt, quod hic coefficientes γ et δ contraria ſigna ſunt nacti;

 ſicque

ſicque, ſi ω, ω', ω'', ω''' denotent omnes valores ipſius ω, aequatio generalis, omnes motus virgae complectens, erit:

$$y = C\,\text{ſin.}\left(\zeta + t\,\frac{\omega\omega c\sqrt{2gb}}{aa}\right)$$
$$\left(e^{u\omega} \mp e^{\omega(1-u)} - (1 \pm e^{\omega})\,\text{ſin.}\,u\omega - (1 \mp e^{\omega})\,\text{coſ.}\,u\omega\right)$$
$$+ C'\,\text{ſin.}\left(\zeta' + t\,\frac{\omega'\omega' c\sqrt{2gb}}{aa}\right)$$
$$\left(e^{u\omega'} \mp e^{\omega'(1-u)} - (1 \pm e^{\omega'})\,\text{ſin.}\,u\omega' - (1 \mp e^{\omega'})\,\text{coſ.}\,u\omega'\right)$$
$$+ C''\,\text{ſin.}\left(\zeta'' + t\,\frac{\omega''\omega'' c\sqrt{2gb}}{aa}\right)$$
$$\left(e^{u\omega''} \mp e^{\omega''(1-u)} - (1 \pm e^{\omega''})\,\text{ſin.}\,u\omega'' - (1 \mp e^{\omega''})\,\text{coſ.}\,u\omega''\right).$$

etc. etc. etc.

Corollarium 1.

§. 44. Quanquam autem omnes motus cum caſu primo perfecte conueniunt: tamen figura, quam virga inter vibrandum recipit, toto coelo eſt diuerſa. Ad quod oſtendendum euoluamus figuram pro ſono fundamentali, vbi eſt $\omega = \frac{3\pi}{2}$, cuius ſinus cum ſit negatiuus, ſigna valebunt inferiora, eritque omiſſo coefficiente

$$y = \text{- - - -}\ e^{u\omega} + e^{\omega(1-u)} - (1 - e^{\omega})\,\text{ſin.}\,u\omega - (1 + e^{\omega})\,\text{coſ.}\,u\omega,$$

vbi eſt $e^{\omega} = 111$. Nunc autem ipſi ω tribuamus duos valores $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, ac reperiemus:

I. Si $u = \frac{1}{3}$, $u\omega = \frac{1}{2}\pi = 90°$ et $e^{u\omega} = 4,8104$ et $e^{-u\omega} = 0,2079$ hincque $y = 4,8104 + 23,0769 + 110 = 138$.

II. Si $u = \frac{2}{3}$, erit $u\omega = \pi = 180°$ et $e^{u\omega} = 23,140$ et $e^{\omega(1-u)} = 4,810$, hincque $y = 23,140 + 4,810 + 112 = 140$. Hi autem duo valores, ſi calculum accuratius inſtituiſſemus, prodiiſ-
Tab. III. ſent aequales. Curua igitur, quam virga hoc caſu induit,
Fig. 4. habebit figuram $ErsF$, fig. 4 repraeſentata. Pro ſequentibus

tibus autem ſonis ſimplicibus vel vnus nodus, vel duo, vel tres ſucceſſiue ingredientur.

Corollarium 2.

§. 45. Ope formularum, quas pro ſingulis his caſibus eruimus, non ſolum omnes ſoni, quos eadem virga elaſtica, diuerſimode conſtituta, edere valet, inter ſe comparari poſſunt, ſed etiam ſoni diuerſarum virgarum, quae tam longitudine quam craſſitie inter ſe diſcrepant, diiudicari poſſunt, dummodo craſſities in omnibus fuerit ſimilis: veluti ſi virgae fuerint cylindricae, quo caſu craſſities cuiusque circulo repraeſentatur; ſi enim talium virgarum diameter craſſitiei fuerit $= c$, longitudo $= a$, tum ſub ſimilibus circumſtantiis ſoni erunt vt $\frac{c}{aa}$, hoc eſt directe vt diameter craſſitiei et reciproce vt quadratum longitudinis, ita vt quo craſſior fuerit virga pro eadem longitudine, ſonus edatur tanto acutior; contra vero quo longior fuerit virga pro eadem craſſitie, eo grauior ſonus ſit proditurus, idque in ratione duplicata.

Scholion.

§. 46. Hic ſcilicet aſſumſimus, in diuerſis virgis craſſitiem ſimilem figuram habere, veluti circularem, quippe quo caſu virgae ſunt cylindricae et verſus omnes plagas aequaliter inflexioni reſiſtunt. Verum etiam noſtrae formulae ad eiusmodi virgas applicari poſſunt, quarum craſſities alia quacunque figura exhibetur. Ad quod oſtendendum conſideremus eiusmodi virgam, cuius ſectiones transuerſales ad longitudinem normaliter factae ſint parallelogramma rectangula A B C D, in quibus ergo duplex Tab. III. Fig 5.

 po-

potiſſimum inflexio locum habere poteſt, quarum altera ſit ſecundum axem A B, quando ſcilicet lineae A C et B D circa hunc axem inflectuntur; altera autem inflexio principalis fieri poteſt circa axem A C. Illo caſu litera noſtra c, quae in ſuperioribus formulis ineſt, aequabitur lateri A C, poſteriore vero caſu lateri A B, vtroque vero caſu alterum latus plane non in computum venitur. Litera enim b pendet, vti iam ſupra notauimus, ab elaſticitate abſoluta materiae, ex qua virgae ſunt fabricatae. Ita ſi virga, cuius longitudo eſt $= a$, incuruetur circa axem A B, ſonus editus erit vt $\frac{AC}{aa}$; at ſi virga incuruetur circa axem
Tab. III. A C, ſonus editus erit vt $\frac{AB}{aa}$, ſi ſcilicet reliquae circum-
Fig. 6. ſtantiae fuerint pares. At ſi ſectio virgae transverſalis fuerit circulus, diametro A B deſcriptus (fig. 6.), tum pro formulis noſtris erit $c = \frac{1}{4}$ A B; vbi perinde eſt, circa quemnam axem fiat incuruatio. Hic quidem alios caſus non ſumus contemplati, niſi in quibus ambo virgae termini vel ſunt liberi, vel ſimpliciter fixi, vel firmiter infixi. Fieri autem poſſet vt eadem virga inſuper in vno vel pluribus locis mediis ſimpliciter figatur, quandoquidem hoc pacto communicatio inter motus diuerſarum partium non tolleretur: ſed omnium huiusmodi caſuum euolutio requireret tractationem infinitam. Vt autem ratio, calculum ad huiusmodi caſum applicandi, intelligatur, ſufficiet vnum talem caſum hic ſubiunxiſſe.

Problema.

§. 47. *Si virga elaſtica non ſolum in vtroque termino*
Fig. 7. *E et F fuerit ſimpliciter fixa, ſed etiam in puncto quocunque medio L ope ſtyli figatur, inueſtigare omnes motus, quibus iſta virga contremiſcere poteſt.*

So-

Solutio.

Maneat virgae tota longitudo E F $= a$, ac vocetur portio E L $= \lambda a$, ita vt λ denotare poſſit fractionem quamcunque vnitate minorem. Ac primo quidem patet, ſi virga in puncto L firmiter eſſet infixa, omnem plane communicationem inter ambas portiones E L et F L tolli, ita vt vtriusque motus a motu alterius neutiquam perturbetur. Verum ſi in puncto L tantum ſtylo figatur, circa quem virga gyrari poſſit, tum neutra pars motum recipere poteſt, quin cum altera is certo modo communicetur. Interim tamen hoc ſtilo continuitas curuae per ambas portiones interrumpitur, ita, vt portio E m L alia aequatione exprimatur atque altera portio L n F: ſcilicet dum hic etiam principio tantum motus regulares inueſtigamus, qui conformes ſunt pendulo ſimplici $= k$, pro motu vtriusque portionis primus factor C ſin. $(\zeta + t\sqrt{\tfrac{g}{k}})$ neceſſario idem manere debet, quoniam ambae portiones ſuas vibrationes eodem tempore ſimilique modo peragere debent. Alteri autem factores diuerſi eſſe poterunt ratione coëfficientium α, β, γ, δ. Omiſſo igitur primo factore vt hactenus faciamus $\frac{a}{s} = \omega$ et $\frac{\beta}{a} = u$; tum vero pro portione E L ſtatuamus

$$y = \ldots\ldots \alpha e^{u\omega} + \beta e^{-u\omega} + \gamma \text{ ſin } u\omega + \delta \text{ coſ.} u\omega,$$

pro altera portione L F ſtatuamus

$$y + \ldots\ldots \alpha' e^{u\omega} + \beta' e^{-u\omega} + \gamma' \text{ ſin. } u\omega + \delta' \text{coſ.} u\omega,$$

qui coëfficientes a prioribus vtcunque diſcrepare poſſunt, dummodo obſeruetur, pro puncto L, vbi fit $u = \lambda$, ex vtraque formula eosdem valores tam pro $(\frac{dy}{ds})$ quam pro $(\frac{ddy}{ds^2})$ prodire debere, quandoquidem anguli, quos vtraque

portio

portio in L cum axe facit, neceſſario aequales eſſe debent; neque vero etiam radius oſculi in hoc puncto L vtrinque diuerſus eſſe poteſt. His obſeruatis pro hoc puncto L, vbi ſit $u = \lambda$, quia vtraque applicata y euaneſcere debet, habebimus ſequentes quatuor aequationes:

$$\text{I. } \alpha e^{\lambda\omega} + \beta e^{-\lambda\omega} + \gamma \,\text{ſin.}\, \lambda\omega + \delta \,\text{coſ.}\, \lambda\omega = 0.$$

$$\text{II. } \alpha' e^{\lambda\omega} + \beta' e^{-\lambda\omega} + \gamma' \,\text{ſin.}\, \lambda\omega = \delta' \,\text{coſ.}\, \lambda\omega = 0.$$

$$\text{III. } \alpha e^{\lambda\omega} - \beta e^{-\lambda\omega} + \gamma \,\text{coſ.}\, \lambda\omega - \delta \,\text{ſin.}\, \lambda\omega$$
$$= \alpha' e^{\lambda\omega} - \beta' e^{-\lambda\omega} + \gamma' \,\text{coſ.}\, \lambda\omega - \delta' \,\text{ſin.}\, \lambda\omega. \text{ ſiue}$$

$$\text{III. } (\alpha - \alpha') e^{\lambda\omega} - (\beta - \beta') e^{-\lambda\omega} + (\gamma - \gamma') \,\text{coſ.}\, \lambda\omega$$
$$- (\delta - \delta') \,\text{ſin.}\, \lambda\omega = 0.$$

$$\text{IV. } (\alpha - \alpha') e^{\lambda\omega} + (\beta - \beta') e^{-\lambda\omega} - (\gamma - \gamma') \,\text{ſin.}\, \lambda\omega$$
$$- (\delta - \delta') \,\text{coſ.}\, \lambda\omega = 0.$$

Nunc igitur ad vtrumque quoque terminum ſpectemus, vnde etiam quatuor reſultabunt aequationes, prouti fuerit vel $\lambda = 0$ vel $\lambda = 1$; terminus ſcilicet E, vbi $u = 0$, praebet:

$$\text{V. } \alpha + \beta + \delta = 0 \text{ et VI. } \alpha + \beta - \delta = 0,$$

terminus autem F, vbi $u = 1$, dat

$$\text{VII. } \alpha' e^{\omega} + \beta' e^{-\omega} + \gamma' \,\text{ſin.}\, \omega + \delta' \,\text{coſ}\, \omega = 0 \text{ et}$$

$$\text{VIII. } \alpha' e^{\omega} + \beta' e^{-\omega} - \gamma' \,\text{ſin.}\, \omega - \delta' \,\text{coſ.}\, \omega = 0.$$

Nacti ſcilicet ſumus octo aequationes pro definiendis octo coëfficientibus, α, β, γ, δ et α', β', γ', δ', ac tum ſupererit adhuc aequatio, vnde angulum ω definiri apportebit. Incipiamus ab aequatione V et VI, ex quibus ſtatim colligitur $\beta = -\alpha$ et $\delta = 0$; deinde VII et VIII, inuicem additae dant $\alpha' e^{\omega} + \beta' e^{-\omega} = 0$, ſubtractae vero dant

γ' ſin.

$$\gamma' \text{ſin. } \omega + \delta' \text{ coſ. } \omega = 0, \text{ vnde fit}$$
$$\beta' = -\alpha' e^{2\omega} \text{ et } \delta' = -\gamma' \text{ tang. } \omega.$$

Hi valores in prima et ſecunda ſubſtituti praebent

$$\text{I. } \alpha(e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega}) + \gamma \text{ ſin. } \lambda\omega = 0 \text{ et}$$

$$\text{II. } \alpha'(e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)}) + \gamma' \text{ſin. } \lambda\omega - \gamma' \text{coſ. } \lambda\omega \text{ tang. } \omega = 0,$$

ex quibus aequationibus reperiuntur valores:

$$\gamma = -\alpha \frac{(e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega})}{\text{ſin. } \lambda\omega} \text{ et } \gamma' = -\frac{\alpha(e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)})}{\text{ſin. } \lambda\omega - \text{coſ. } \lambda\omega \text{ tang. } \omega},$$

vnde fit

$$\delta' = \frac{\alpha'(^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)}) \text{ tang. } \omega}{\text{ſin. } \lambda\omega - \text{coſ. } \lambda\omega \text{ tang. } \omega}.$$

Ex his valoribus nunc pro reliquis aequationibus colligimus: $\beta - \beta' = -\alpha + \alpha' e^{2\omega}$ et

$$\gamma - \gamma' = -\frac{\alpha(e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega})}{\text{ſin. } \lambda\omega} + \frac{\alpha'(e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)})}{\text{ſin. } \lambda\omega - \text{coſ. } \lambda\omega \text{ tang. } \omega} \text{ et}$$

$$\delta - \delta' = -\frac{\alpha'(e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)}) \text{ tang. } \omega}{\text{ſin. } \lambda\omega - \text{coſ. } \lambda\omega \text{ tang. } \omega}.$$

Nunc autem fit

$$\text{III. } \alpha((e^{\lambda\omega} + e^{-\lambda\omega}) - (e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega}) \text{ cot. } \lambda\omega))$$
$$= \alpha'(e^{\lambda\omega} + e^{\omega(2-\lambda)}) - (e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)}) \left(\frac{\text{coſ. } \lambda\omega + \text{ſin. } \lambda\omega \text{ tang. } \omega}{\text{ſin. } \lambda\omega - \text{coſ. } \lambda\omega \text{ tang. } \omega}\right),$$

quae aequatio contrahitur in ſequentem formam:

$$\alpha(e^{\lambda\omega} + e^{-\lambda\omega}) - (e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega}) \text{ cot. } \lambda\omega)$$
$$= \alpha'((e^{\lambda\omega} + e^{\omega(2-\lambda)}) + e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)} \text{cot. } (1-\lambda)\omega)),$$

quarta vero aequatio praebet iſtam:

$$2\alpha(e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega}) = 2\alpha'(e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)});$$

ex hac poſtrema deducitur

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)}}{e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega}},$$

vnde capere licebit

$$\alpha = e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)} \text{ et } \alpha' = e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega},$$

quos valores iam in tertia aequatione ſubſtitui oportet: vnde facta reductione prodibit

$$0 = 2 - 2e^{2\omega} - (e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)})(e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega})(\cot.\lambda\omega + \cot.(1-\lambda)\omega$$

ſiue

$$0 = 2 - 2e^{2\omega} - (e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)})(e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega})\frac{\sin.\omega}{\sin.\lambda\omega\sin.(1-\lambda)\omega}.$$

Sicque totum negotium huc eſt perductum, vt ex iſta aequatione valores anguli ω eliciantur, quem quidem laborem, ob formulas tantopere complicatas, ſuſcipere non auſim, ſi quidem hoc loco ſufficit methodum tradidiſſe, qua huiusmodi quaeſtiones arduae ſint tractandae. Caeterum patet, ſi fuerit $\lambda = 0$, vt portio E L fiat infinite parua, nullum motum communem inter ambas partes exiſtere poſſe, id quod etiam calculus oſtendet, quippe qui praebet

$$0 = 2(1 - e^{2\omega}),$$

vnde ſequitur $e^{2\omega} = 1$, ideoque $\omega = 0$, quo valore ſtatus quietis innuitur, quod idem eueniet, ſi ſtatuatur $\lambda = 1$, tum enim terminus F erit quaſi muro infixus. At caſus, quo $\lambda = \frac{1}{2}$, ſingularem euolutionem meretur.

Euolu-

Euolutio caſus,

quo virga elaſtica EF non ſolum in vtroque termino E et F, ſed etiam in eius medio L ſtylo eſt fixa.

§. 48. Cum igitur hoc caſu ſit $\lambda = \frac{1}{2}$, aequatio finalis hanc induet formam: Tab. III. Fig 8.

$$o = 2 - 2e^{2\omega} - (e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{\frac{3}{2}\omega})(e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega}) \frac{\text{ſin.}\, \omega}{\text{ſin.}\, \frac{1}{2}\omega^2},$$

quae reducitur ad hanc:

$$o = 2(1 - e^{2\omega})\,\text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}\omega^2 - (1 - e^{\omega})(e^{\omega} - 1)\,\text{ſin.}\, \omega,$$

quae per factorem communem $1 - e^{\omega}$ diuiſa, (quippe ex quo oriretur $e^{\omega} = 1$, hinc $\omega = o$,) pro ſtatu quietis producit hanc aequationem:

$$o = 2(1 + e^{\omega})\,\text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}\omega^2 - (e^{\omega} - 1)\,\text{ſin.}\, \omega,$$

quae, ſi loco $\text{ſin.}\, \omega$ ſcribatur $2\,\text{ſin.}\, \frac{1}{2}\omega\, \text{coſ.}\, \frac{1}{2}\omega$, abit in hanc:

$$o = (1 + e^{\omega})\,\text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}\omega^2 - (e^{\omega} - 1)\,\text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}\omega\, \text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}\omega,$$

quae manifeſto duos habet factores, alterum $\text{ſin.}\, \frac{1}{2}\omega$, alterum vero

$$(1 + e^{\omega})\,\text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}\omega - (e^{\omega} - 1)\,\text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}\omega,$$

quorum vterque nihilo aequatus praebet ſolutionem: ambas igitur ſeorſim perpendamus.

§. 49. Pro priore igitur caſu ſtatuamus $\text{ſin.}\, \frac{1}{2}\omega = o$, eritque in genere $\frac{1}{2}\omega = i\pi$, denotante i numerum integrum quemcunque, ita vt hic iam innumerabiles motus regulares contineantur; ac manifeſtum eſt hunc caſum prorſus conuenire cum caſu quarto ſupra euoluto, niſi

quod hic ſit $\frac{1}{2}\omega$ quod ibi erat ω; ſcilicet hic pro vtraque portione longitudo tantum eſt $\frac{1}{2}a$. Vtraque igitur ſemiſſis eodem modo ſuas vibrationes peragit, ac ſi ſeorſim exiſteret et in vtroque termino ſtylo ſimpliciter eſſet fixa; quamobrem omnes ſoni ſimplices, quos vtraque portio edere poteſt, ſequentibus numeris exprimentur:

$$\frac{4\pi c\sqrt{2gb}}{aa};\quad \frac{16\pi c\sqrt{2gb}}{aa};\quad \frac{36\pi c\sqrt{2gb}}{aa};\quad \frac{64\pi c\sqrt{2gb}}{aa};$$

qui ergo omnes duplici octaua altiores ſunt quam caſu IV; cuius diſcriminis ratio in hoc eſt ſita, quod longitudo hoc caſu tantum ſemiſſis eſt illius.

§. 50. Hoc igitur caſu coëfficientes α, β, γ, δ, et α', β', γ', δ', ſequenti modo determinabuntur:

$$\alpha = e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{\frac{3}{2}\omega};\ \beta = e^{\frac{3}{2}\omega} - e^{\frac{1}{2}\omega};\ \gamma = -\frac{\left(e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{\frac{3}{2}\omega}\right)\left(e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega}\right)}{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\omega};\ \delta = 0$$

$$\alpha' = e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega};\ \beta' = -e^{2\omega}\left(e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega}\right);\ \gamma' = -\frac{\left(e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega}\right)\left(e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{\frac{3}{2}\omega}\right)}{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\omega - \text{coſ.}\,\frac{1}{2}\omega\,\text{tang.}\,\omega}\ \text{et}$$

$$\delta' = \frac{\left(e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega}\right)\left(e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{\frac{3}{2}\omega}\right)\text{tang.}\,\omega}{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\omega - \text{coſ.}\,\frac{1}{2}\omega\,\text{tang.}\,\omega}.$$

Eſt vero

$$\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\omega - \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{tang.}\,\omega = \frac{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\omega\,\text{coſ.}\,\omega - \text{coſ.}\,\frac{1}{2}\omega\,\text{ſin.}\,\omega}{\text{coſ.}\,\omega} = -\frac{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\omega}{\text{coſ.}\,\omega},$$

vbi, quia eſt $\omega = 2i\pi$, erit $\text{coſ.}\,\omega = 1$, at $\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\omega = 0$. Multiplicemus igitur omnes hos coëfficientes per $\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\omega$ eritque

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = -(1 - e^{\omega})(e^{\omega} - 1)\ \text{et}\ \delta = 0;$$

porro

porro

$$\alpha' = 0,\ \beta' = 0,\ \gamma' = (e^{\omega} - 1)(1 - e^{\omega}),\ \text{et}\ \delta' = 0.$$

Quia igitur omnes euaneſcunt praeter γ et γ'. ac praeterea eſt $\gamma' = -\gamma$, ſi ponamus $\gamma = 1$ erit $\gamma' = -1$; pro portione E L igitur aequatio motum exprimens erit

$$y = C\ \text{ſin.}\ (\zeta + t\,\tfrac{\omega\omega c \sqrt{2gb}}{aa})\ \text{ſin.}\ u\,\omega$$

et pro altera portione L F

$$y = -C\ \text{ſin.}\ (\zeta + t\,\tfrac{\omega\omega c \sqrt{2gb}}{aa})\ \text{ſin.}\ u\,\omega,$$

vbi eſt $u = \frac{1}{a}$.

§. 51. Praeterea vero datur adhuc alia ſolutio ex altero factore oriunda, ex quo fit

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\omega = \frac{e^{\omega} - 1}{1 + e^{\omega}} = \frac{e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega}}{e^{\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega}},$$

qui valor congruit cum eo, qui ſupra, caſu quinto, eſt erutus: totum enim diſcrimen in hoc conſiſtit, quod hic ſit $\frac{1}{2}\omega$ quod ibi erat ω, quemadmodum rei natura poſtulat, quoniam hic vtriusque portionis longitudo tantum eſt $\frac{1}{2}a$. Hinc ergo intelligimus, vtramque portionem E L et L F perinde contremiſcere poſſe ac ſi vtraque in E et F ſtylo ſimpliciter eſſet fixa, in L vero firmiter prorſus infixa. Hic autem valores pro ω erunt $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{9\pi}{2}$, $\frac{13\pi}{2}$, $\frac{17\pi}{2}$, $\frac{21\pi}{2}$, etc. ſicque hinc ſoni orientur duabus octauis altiores quam caſu quinto. Hic igitur maxime notatu dignum contigit, quod ambas portiones E L et L F duplici modo contremiſcere poſſunt, altero, qui cum caſu ſuperiore quarto, altero vero, qui cum caſu quinto congruit. Caeterum valores coëfficientium

ficientium perinde ſe habebunt, vti iam ſupra ſunt euoluti, niſi quod pro hoc caſu non ſit ſin. $\frac{1}{2}\omega = c$.

Scholion.

§. 52. Hactenus perpetuo aſſumſimus, virgam elaſticam in ſtatu naturali eſſe rectam. Nihilo vero difficilior euadit inveſtigatio, ſi virga in ſtatu naturali habuerit figuram quamcunque incuruatam. Veluti ſi eius figura naturalis fuerit curua quaecunque E X F, totum diſcrimen huc reducetur, vt ipſam hanc lineam curuam E X F pro axe accipiamus, dum ante axis nobis erat linea recta cum figura curuae congruens. Hic ſcilicet ſumta portione quacunque $EX = x = s$, punctum virgae X alium motum recipere nequit, niſi in directione X Y, ad ipſam curuam normali. Quare ſi concipiamus durante motu punctum X translatum eſſe in Y, ac vocemus hanc applicatam $XY = y$, formulae differentiales, quas theoria nobis ſuggeſſit etiam hic locum habebunt, atque adeo formula $-\frac{ddy}{ds^2}$, hic iam exceſſum curuaturae in Y ſupra curuaturam naturalem in X exprimet; quo obſeruato aequatio motum determinans manebit prorſus vt ante, ſcilicet

Tab. III. Fig. 9.

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -bcc\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right),$$

vnde etiam pro ſingulis motibus regularibus habebitur eadem aequatio integralis:

$$y = C\,\text{ſin.}\left(\zeta + t\sqrt{\frac{2g}{k}}\right)\left(\alpha e^{\frac{s}{f}} + \beta e^{\frac{-s}{f}} + \gamma\,\text{ſin.}\,\frac{s}{f} + \delta\,\text{coſ.}\,\frac{s}{f}\right)$$

exiſtente $f^4 = bcck$. Quare ſi tota virgae longitudo E X F ſtatuatur $= a$, omnes caſus, quos ſupra pertractauimus etiam hic ſine vlla mutatione locum habebunt, et iſta virga

ga omnes illos ſonos edere poterit, quos ſupra aſſignauimus, prouti ſcilicet virgae termini fuerint liberi, vel ſimpliciter fixi, vel etiam firmiter infixi, ita vt pro talibus virgis naturaliter incuruatis nulla noua inueſtigatione ſit opus. Interim tamen hinc ii caſus ſunt excipiendi, quibus virga ita eſt incuruata, vt figuram in ſe redeuntem referat, quandoquidem ſimilis caſus in virgis naturaliter rectis locum habere nequit, quamobrem iſtum caſum coronidis loco hic ſubiungamus.

Euolutio caſus,

quo virga elaſtica in ſtatu naturali figuram in ſe redeuntem habet, ſiue de ſonis annulorum elaſticorum.

§. 53. Sit igitur figura virgae elaſticae circulus AXBC, ſiue alia quaecunque curua in ſe rediens, cuius tota peripheria ſit $= a$, craſſities vero et elaſticitas virgae maneant eaedem vt ante ſunt ſtabilitae; tum vero pro motibus regularibus, quos haec virga recipere poteſt, ſit k longitudo penduli ſimplicis iſochroni, vnde formetur quantitas $f = \sqrt[4]{bcck}$; tum pro quacunque portione indefinita $AX = s$ ſit Y punctum, in quod praeſenti tempore $= t$ punctum X ſit translatum, et iam vidimus, aequationem integralem in genere fore, Tab. III. Fig. 10.

$$Y = C\,\text{ſin.}\left(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2f}{k}}\right)\left(\alpha e^{\frac{s}{f}} + \beta e^{\frac{-s}{f}} + \gamma\,\text{ſin.}\tfrac{s}{f} + \delta\,\text{coſ.}\tfrac{s}{f}\right).$$

Sicque totum negotium iam huc eſt perductum, vt coëfficientibus α, β, γ, δ debiti valores aſſignentur, vbi res

longe

longe aliter ſe habere deprehenditur ac ſupra, quoniam hic neque termini liberi, neque ſimpliciter fixi, neque firmiter infixi occurrunt.

§. 54. At vero ipſa indoles, qua figura virgae in ſe rediens aſſumitur facilem viam nobis aperit hos coëfficientes determinandi. Conſideremus enim ipſum punctum A, vbi eſt $s = 0$, quod ita accipi poteſt, vt ibi fiat etiam $y = 0$. Pro hoc ergo puncto, omiſſo factore partim conſtante partim a tempore pendente, fieri debet $0 = \alpha + \beta + \delta$. Iam ſtatuamus $s = a$, et quia iterum in idem punctum A incidimus ponendo breuitatis gratia $\frac{a}{s} = \omega$, fieri oportet

$$0 = \alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} + \gamma \,\text{ſin.}\, \omega + \delta \,\text{coſ.}\, \omega,$$

atque idem euenire debet, ſi ponamus $s = 2a$, ſiue $3a$, ſiue $4a$ etc., vnde naſcentur ſequentes aequationes:

$$0 = \alpha e^{2\omega} + \beta e^{-2\omega} + \gamma \,\text{ſin.}\, 2\omega + \delta \,\text{coſ.}\, 2\omega,$$
$$0 = \alpha e^{3\omega} + \beta e^{-3\omega} + \gamma \,\text{ſin.}\, 3\omega + \delta \,\text{coſ.}\, 3\omega,$$

etc. etc.

quibus omnibus ſimul ſatisfieri nequit, niſi ſit $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $\delta = 0$; tum vero neceſſe eſt, vt ſimul fiat

$$\text{ſin.}\, \omega = 0, \ \text{ſin.}\, 2\omega = 0, \ \text{ſin.}\, 3\omega = 0 \text{ etc.}$$

quod in genere eueniet, ſumendo $\omega = i\pi$, denotante i numerum integrum quemcunque; vnde vt ſupra oritur ſonus $= \frac{ii\pi c\sqrt{2gb}}{aa}$, ita vt ſoni ſimplices progrediantur in hac progreſſione:

$$\frac{\pi c\sqrt{2gb}}{aa}, \ \frac{4\pi c\sqrt{2gb}}{aa}, \ \frac{9\pi c\sqrt{2gb}}{aa}, \ \frac{16\pi c\sqrt{2gb}}{aa} \text{ etc.}$$

§. 55.

§. 55. Sonus igitur principalis, quem talis virga edere poteſt, continetur in formula $\frac{\pi c \surd 2 g b}{aa}$; reliqui vero ſoni ſimplices ſecundum numeros quadratos 4, 9, 16, 25, progrediuntur, qui cum mox nimis ſiant alti quam vt exaudiri queant, praeter ſonum fundamentalem plerumque alius non ſentietur, niſi duplex octaua, quo ipſo harmonia gratiſſima percipietur. Tales igitur annuli elaſtici prae chordis muſicis hac inſigni proprietate ſunt praediti, vt ſonos multo puriores reddant, id quod etiam in integris diſcis et catinis campaniformibus euenire debere videtur, cuiusmodi corpora inter inſtrumenta muſica iam ſunt recepta, quorumque ſoni ſingulari ſuauitate ſenſum auditus afficere feruntur. Caeterum manente eadem elaſticitate hi ſoni tenent rationem reciprocam duplicatam totius perimetri *a*, prorſus vti iam ſupra circa virgas rectas obſeruauimus.

CONIECTVRA
CIRCA NATVRAM AERIS,
PRO EXPLICANDIS PHAENOMENIS IN ATMOSPHAERA OBSERVATIS.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Quanquam nobis in intima naturae myſteria penetrare, indeque veras cauſſas Phaenomenorum agnoſcere neutiquam eſt conceſſum: tamen euenire poteſt, vt hypotheſis quaedam ficta pluribus phaenomenis explicandis aeque ſatisfaciat, ac ſi vera cauſſa nobis eſſet perſpecta, quemadmodum feliciſſimo ſucceſſu omnes fere motus coeleſtes ex hypotheſi attractionis vniuerſalis determinari ſolent, etiamſi haec ipſa hypotheſis ex Phyſica prorſus ſit profliganda.

§. 2. Quam ob rem fortaſſe ſimilimodo quaepiam hypotheſis excogitare poterit, quae omnibus Phaenomenis aëris et atmoſphaerae explicandis ſufficiat. Talem ideam iam ante quinquaginta annos in Tomo II. veterum Commentariorum propoſui, quae ad plura aëris phaenomena explicanda ſatis apta videbatur, etiamſi facile agnouiſſem, talem aëris ſtructuram reuera admitti non poſſe. Imprimis

mis huius Phaenomeni explicatio: quod, dum aër vaporibus eſt inquinatus, eius elaſticitas diminuatur, mihi omni attentione digna eſt viſa, cum eius cauſſa a nemine adhuc dilucide ſit expoſita. Illo vero tempore Theoria fluidorum nondum ſatis erat exculta, vt iſtam ideam penitus euoluere valuiſſem; quamobrem operae pretium fore exiſtimo, illam aëris ſtructuram, quam finxeram, accuratius examinare, et quaenam Phaenomena inde oriri debeant, maiori curua inquirere.

§. 3. Naturam aëris autem ita animo conceperam, quaſi ex innumerabilibus minimis bullulis ſeu ſphaerulis eſſet compoſitus, quae ſingulae cuticula tenuiſſima aquoſa circumdarentur, intra quas propria aëris materia motu rapidiſſimo in gyrum circumagatur, in cuius vi centrifuga elaſticitas aëris produci erat viſa. Totum negotium igitur huc redit, vt iſta hypotheſis accuratius perpendatur, et ad cuiusmodi phaenomena producenda ſit accommodata, inquiratur. Niſi enim manifeſtas contradictiones inuoluat, ſatis probabile videtur, aëris phaenomena, actu obſeruata, non multum diſcrepare poſſe.

§. 4. Quod igitur primo ad pelliculas illas aqueas ſiue vaporoſas attinet, earum realitas in aqua ſpumoſa atque bullis ſaponaceis manifeſto deprehenditur, vnde recte concludere poterimus, vapores in aëre adſcendentes ita diſſipari, vt elementa aërea inſtar cuticulae inuoluant, quae ſi per omnia elementa aequaliter diſpergatur, atmoſphaera nihil de pelluciditate amittet, ſin autem intra ſphaerulas aëreas confuſe hoſpitentur, refractio radiorum lucis eorumque tranſitus non mediocriter perturbabitur, vnde in

aëre inferiore nebulae, in ſuperiore autem nubes oriri videntur. Praeterea, quo plures vapores aëri fuerint admixti, cuticulae illae, ſphaerulas aëreas ambientes, euadent denſiores, quoad ſcilicet conſtitutio harum ſphaerularum ſufferre valet.

§. 5. Deinde etiam non deſunt rationes, quae ſuadent, propriam aëris materiam in his ſphaerulis motu rapidiſſimo circumagi, cum aliunde cauſſa elaſticitatis repeti nequeat. Praeterea cum iam ſatis euictum ſit, calorem in certa agitatione aetheris conſiſtere, hinc vtique materia illa aëris in ſphaerulis motum quendam recipere debet, qui cum in tali anguſto ſpatio ſit incluſus, non aliter niſi per motum vorticoſum continuari poteſt, id quod eo magis ſit probabile, quod aucto calore, indeque propterea motu iſto verticoſo, elaſticitas aëris quoque augeatur; vnde manifeſtum eſt, motum gyratorium in ſphaerulis aëreis cum cauſſa caloris arctiſſime eſſe connexum.

§. 6. Deinde vero etiam aſſumſi, ſingula aëris elementa in memoratis ſphaerulis per circulos maximos circumagi, vt in iis vndequaque aequalis vis centrifuga, a centro cuiusque ſphaerulae recedens, oriatur. haecque hypotheſis nuncquidem cum principiis mechanicis neutiquam conſiſtere poſſe videtur, cum demonſtratum ſit, nullum alium motum circa punctum quodpiam fixum in corporibus dari poſſe, niſi qui peragatur circa axem quempiam fixum. A tali autem motu alia vis centrifuga generari non poteſt, niſi quae ab axe gyrationis recedat, ideoque in eadem ſphaerula maxime eſſet irregularis, cum certum ſit, elaſticitatem aëris in omnes plagas aequaliter tendere.

§. 7.

§. 7. Obiectio autem hinc ab illo motu oriunda tantum locum habet in corporibus ſolidis: in fluidis enim res longe aliter ſe habere poteſt; atque adeo clare hic demonſtrabo, motum illum inteſtinum in ſingulis ſphaerulis reuera ita comparatum eſſe debere, ac ſi ſingula elementa in circulis maximis circa centrum reuoluerentur.

§. 8. Primo autem, cum materia aërea ſit homogenea, omnes eius particulas inter ſe aequales concipere licet, quibus adeo initio celeritates aequales ſint impreſſae, quibus ergo ſingulae, ſi eſſent ſolitariae, in plano vniformiter in directum ferrentur, in ſuperficie autem ſphaerica in circulis maximis eſſent progreſſurae; vnde ſi cuiusque celeritas fuerit $= c$ et r radius ſphaerae, cuiusque vis centrifuga foret $= \frac{cc}{2gr}$, qua ſcilicet a centro ſphaerae recedere conaretur; vbi g exprimit altitudinem lapſus grauium vno minuto ſecundo, ſiquidem celeritas per ſpatium vno minuto ſecundo percurſum definiatur.

§. 9. Conſideremus iam duas huiusmodi particulas A et B, ſecundum directiones A C et B C ita motas, vt in C conuenirent et colliſionem paterentur, quippe ſine qua corpusculum A deſcripturum eſſet ſpatium $C a = c$, alterum vero B C ſecundum directionem $C b$ celeritate eadem c. Iam vt videamus quamnam mutationem colliſio ſit productura, toti ſyſtemati, mente ſaltem, imprimamus celeritatem $= c$, ſecundum directionem b C, quo pacto corpusculum B in quiete ſiſtetur in puncto C, corpusculum vero A, ſumto $C B = C b = c$, motum habebit ſecundum diagonalem C D parallelogrammi C B D a, qua retro producta in d, colliſio perinde peragetur, ac ſi Tab. IV. Fig. 1.

 cor-

corpuſculum A motu dC in alterum corpusculum B, in C quieſcens, impingeret. Conſtat autem, tum corpusculum A in C eſſe quieturum, alterum vero B celeritatem eſſe acquiſiturum C D. Iam reſtituatur motus mente impreſſus celeritate C b. Hoc modo corpus prius A nunc motum acquiret C b, alterius vero B motus componetur ex motu C D et C b, vnde ſi compleatur parallelogrammam C D a b, iſtud corpus iam motum habebit C a. Vnde patet, motus vtriusque corporis per colliſionem inter ſe permutari, ita vt vtriusque motus ab altero continuetur. Hinc cum inter bina corpuscula nullum diſcrimen intercedat, totus motus ſe habebit ac ſi vtrumque corpusculum motum inſitum ſine vlla mutatione proſequeretur, vnde etiam vtriusque vis centrifuga nullam mutationem ob colliſionem ſubibit.

§. 10. Quod ſi iam tales colliſiones in infinitum multiplicentur, omnes motus nihilominus in circulis ſphaerae maximis, at vero ſucceſſiue ab aliis aliisque corpusculis, peragentur; quamobrem omnes vires centrifugae directe a centro recedent, et quidem eadem quantitate $\frac{cc}{2gr}$.

§. 11. In motu ergo vorticoſo, quem materiae aëris propriae, in ſingulis ſphaerulis memoratis, tribuimus, tuto aſſumere poſſumus, omnes plane motus in circulis maximis peragi, atque ſingulas particulas pari vi centrifuga a centro ſphaerulae recedere conari; quamobrem omnes obiectiones, quae olim contra vortices Carteſianos ſunt motae, omnem vim amittunt. Neque tamen idcirco arbitror, illos Carteſii vortices admitti poſſe; at vero illi vortices, per quos Vir Celeb. *Daniel Bernoulli* olim attractionem vni-

vniuerſalem in mundo explicare eſt annifus, hinc ſummam vim acquirunt, ita vt omnes obiectiones contra factae quaſi ſponte euaneſcant.

§. 12. Contemplemur nunc ſphaerulam quamcunque, naturam aëris conſtituentem, cuius extrema cruſta aqua, ſeu materia vaporoſa conſtet, intra quam materia aëris propria motu ante deſcripto in gyrum agatur. Sumto igitur centro ſphaerulae in O, ſit $OR = r$ radius totius ſphaerulae, ſeu extimae eius ſuperficiei, ſitque RS craſſities cruſtae aqueae, ponaturque $OS = s$, ita vt craſſities cruſtae aqueae ſit $RS = r - s$; tum vero ſit ST craſſities cruſtae aëreae gyrantis, quae ergo, poſito $OT = t$, erit $= s - t$. Intimum autem huius ſphaerulae ſpatium, a centro O vsque ad T, repletum ſit aethere puro, grauitate deſtituto, a cuius ſcilicet agitatione materia aëris propria perpetuo ad motum cieatur, modo magis modo minus, pro gradu caloris ſeu frigoris. Tab. IV. Fig. 2.

§. 13. Hinc ergo, denotante π peripheriam circuli, cuius diameter $= 1$, erit volumen totius ſphaerulae $= \frac{4}{3}\pi r^3$; vnde patet, volumen cruſtae aqueae fore $\frac{4}{3}\pi(r^3 - s^3)$, et volumen cruſtae aëreae $\frac{4}{3}\pi(s^3 - t^3)$; volumen denique aethereum erit $\frac{4}{3}\pi t^3$. Quod ſi iam denſitatem aquae vnitate deſignemus, erit maſſa cruſtae aqueae $\frac{4}{3}\pi(r^3 - s^3)$. At ſi denſitatem materiae aëris propriae vocemus δ, erit eius maſſa $\frac{4}{3}\pi\delta(s^3 - t^3)$. Quare cum ipſe aether denſitate carere ſit cenſendus, erit tota maſſa in ſphaerula contenta $\frac{4}{3}\pi(r^3 - s^3 + \delta s^3 - \delta t^3)$, quae ſcilicet ſimul exprimet pondus totius ſphaerulae, cuius radius

dius $= r$; vnde manifeſtum eſt, aetherem in medio contentum recte negligi poſſe.

§. 14. Hic autem ſtatim liquet, denſitatem δ non ex ſtatu aëris ordinarii, qui iam ob elaſticitatem plurimum eſt expanſus, aeſtimari debere. Cum enim aër, in ſpatio S T incluſus, omni elaſticitate deſtituatur, quandoquidem demum eius agitatione elaſticitas aëris naturalis producitur, iſte aër in noſtra ſphaerula contentus in eo ſtatu reperiri cenſendus eſt, ac ſi ad ſummum denſitatis gradum iam eſſet compreſſus. Phaenomena autem conſulentes deprehendimus, aërem naturalem in ſpatium quaſi octingenties minus comprimi poſſe, qui numerus reſpondet rationi inter denſitatem aëris et aquae; neque ergo errabimus, ſi denſitatem aëris, ad ſummum compreſſionis gradum reductum, denſitati aquae aequalem ſtatuamus, ita vt ſit $\delta = 1$. Probabile autem admodum videtur, aërem ad talem ſtatum reductum, ſimulque omni elaſticitate carentem, vix a natura aquae eſſe diſcrepaturum. Hinc igitur, poſito $\delta = 1$, maſſa atque etiam pondus noſtrae ſphaerulae erit $\frac{4}{3}\pi(r^3 - t^3)$ ſiue aequabitur ponderi maſſae aqueae idem volumen habentis.

§. 15. Inueſtigemus nunc totam vim centrifugam, quae ex motu gyratorio cruſtae aëreae S T oriri debet; quem in finem conſideremus punctum quoddam medium X, poſita eius diſtantia a centro O X $= x$, eiusque celeritate gyratoria $= c$, erit vis centrifuga in puncto X $= \frac{cc}{2gx}$. Hac ſcilicet vi elementum materiae in X conatur a centro O recedere, vnde in iſta cruſta aërea orietur ſtatus preſſionis a termino T ad S continuo creſcens.

§. 16.

§. 16. Conſtat autem, in fluidis ſtatum preſſionis commodiſſime exprimi poſſe per certam altitudinem, quam hic vocemus $= p$, qua deſignatur, preſſionem fluidi aequalem eſſe ponderi cylindri, ex eadem materia conſtantis, et cuius altitudo ſit $= p$. Pro noſtro ergo caſu deſignet p altitudinem columnae aqueae, cuius pondus aequetur preſſioni in puncto X, dum ſcilicet in eandem baſin premit. Hinc ergo, ſumto elemento $Xx = dx$, ita vt preſſio in x ſit $p + dp$, euidens eſt, incrementum preſſionis dp aequari debere vi centrifugae, qua elementum Xx a centro repellitur; vnde patet fore $dp = \frac{cc}{2gx}dx$, ſicque integrando nanciſcimur $p = \frac{cc}{2g}lx$, quod integrale ita determinari debet, vt ſumto $x = t$ euaneſcat, ita vt pro puncto X preſſio ſit $p = \frac{cc}{2g}l\frac{x}{t}$. Quare promoto puncto X vsque ad S, preſſio hoc loco erit $p = \frac{cc}{2g}l\frac{c}{t}$. Tanta ſcilicet preſſione iſta cruſta aërea, ſimulque tota prorſus ſphaerula, conabitur ſe expandere, ac reuera ſe expanderet, niſi vndequaque paribusque viribus comprimeretur.

§. 17. Quantumuis autem talis bullula ſiue expandatur ſiue comprimatur, in ea ſemper eadem quantitas materiae manet incluſa, quia neque materiae contentae exitus, neque nouae ingreſſus conceditur. Ponamus ergo quantitatem materiae incluſae aequari globulo aquae, cuius radius $= a$, quandoquidem omnem calculum ad denſitatem aquae reducimus. Hinc ergo quantitas materiae in hac bullula contentae erit $\frac{4}{3}\pi a^3$, quae cum partim ex cruſta aquea partim ex aërea eiusdem cum aqua denſitatis conſtet, ponamus maſſam aqueam eſſe $\frac{4}{3}\pi\lambda a^3$, ita vt quantitas materiae aëreae propriae ſit $\frac{4}{3}\pi(1-\lambda)a^3$: quantitas

ergo aquae per aërem diſperſae erit ad quantitatem aëris propriam, vt $\lambda : 1 - \lambda$.

§ 18. Supra autem inuenimus, volumen cruſtae aqueae eſſe $\frac{4}{3}\pi(r^3 - s^3)$, vnde erit $r^3 - s^3 = \lambda a^3$. Deinde cum volumen materiae aëreae inuentum ſit $\frac{4}{3}\pi^3(s^3 - t^3)$, erit $s^3 - t^3 = (1 - \lambda) a^3$. Hinc igitur tam s^3 quam t^3 per a^3 et r^3 definire poterimus: erit ſcilicet $s^3 = r^3 - \lambda a^3$ et $t^3 = r^3 - a^3$. Quare cum altitudinem preſſioni debitam inuenerimus

$$p = \frac{cc}{2g} l \frac{s}{t} = \frac{cc}{6g} l \frac{s^3}{t^3}, \text{ erit nunc } p = \frac{cc}{6g} l \frac{r^3 - \lambda a^3}{r^3 - a^3}.$$

§. 19. Cum porro denſitas reperiatur, ſi maſſa per volumen diuidatur, quia noſtro caſu maſſa eſt $\frac{4}{3}\pi a^3$, volumen autem $\frac{4}{3}\pi r^3$, erit denſitas hoc loco $\frac{a^3}{r^3}$. Quod ſi ergo denſitatem hanc deſignemus littera q, erit $q = \frac{a^3}{r^3}$, ideoque $r^3 = \frac{a^3}{q}$, qui valor in noſtra formula ſubſtitutus praebet $p = \frac{cc}{6g} l \frac{1 - \lambda q}{1 - q}$; vbi, vt notauimus, q exprimit denſitatem aëris, dum aquae denſitas vnitate deſignatur, ideoque q ſemper erit fractio quam minima. In ſuperficie ſcilicet Terrae erit quaſi $q = \frac{1}{700}$, vel $q = \frac{1}{800}$.

§. 20. Cum igitur q ſit fractio tam exigua, erit ſatis exacte

$$l(1 - \lambda q) = -\lambda q - \frac{1}{2}\lambda^2 q^2 - \frac{1}{3}\lambda^3 q^3 \text{ et}$$
$$l(1 - q) = -q - \frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{3}q^3,$$

qui poſterior logarithmus a priore ſubtractus relinquit

$$l \frac{1 - \lambda q}{1 - q} = (1 - \lambda) q + \frac{1}{2}(1 - \lambda^2) q^2 + \frac{1}{3}(1 - \lambda^3) q^3,$$

quocirca habebimus pro preſſione p hanc formulam:

$$p = \frac{cc}{6g}\left((1 - \lambda) q + \frac{1}{2}(1 - \lambda^2) q^2 + \frac{1}{3}(1 - \lambda^3) q^3\right)$$

cuius

cuius ſeriei plerumque ſufficiet primum terminum, vel ad ſummum bina priora accepiſſe.

§. 21. Iam igitur inſignem relationem inter denſitatem aëris q et altitudinem preſſioni debitam p ſumus adepti, cum ſit

$$p = \frac{cc}{eg}\left((1-\lambda)\, q + \tfrac{1}{2}(1-\lambda\lambda)\, qq + \tfrac{1}{3}(1-\lambda^3)\, q^3\right),$$

vbi tam litterae p et q quam λ determinatos ſortiuntur valores. Erit ſcilicet p altitudo Barometri aquei, preſſionem Atmoſphaerae aequilibrantem, cuius igitur pars circiter decima quarta dabit altitudinem Barometri mercurialis; tum vero erit q ad 1 vt denſitas aëris ad denſitatem aquae. Denique λ exprimit portionem vaporum aqueorum per Atmoſphaeram diſperſorum. His obſeruatis ſolus primus terminus ſeriei pro p inuentae, $\frac{cc}{eg}(1-\lambda)q$, inſigne phaenomenon iam nobis egregie explicat. Inde enim patet, quo plures vapores cum aëre ſint permixti, quorum quantitas eſt vt λ, preſſionem p eſſe debere tanto minorem, pro eadem ſcilicet aëris denſitate q, atque haec explicatio, quam iam olim loco ſupra citato inueneram, notatu maxime digna eſt viſa.

§. 22. Neque vero ſolus primus ſeriei terminus iſtam elaſticitatis aëris diminutionem declarat, ſed etiam omnes ſequentes termini minores ſunt quam ſi eſſet $\lambda = 0$, nullique vapores in aëre verſarentur. Ceterum hic quoque notari oportet, etiam litteram c inſignem variationem ſubire poſſe, pro rapiditate motus gyratorii in noſtris ſphaerulis vel bullulis, quae cum gradui caloris proportionalis

 nalis

nalis eſſe videatur, aucto vel diminuto calore etiam quantitas cc vel increſcet vel diminuetur.

§. 23. Quin etiam hinc ipſa celeritas c, qua materia aërea in bullulis gyratur, abſolute determinari poteſt, pro data ſcilicet altitudine p et denſitate q cum humiditate λ. Sumto enim primo tantum ſeriei termino, qui ad hoc inſtitutum prorſus ſufficit, erit $cc = \frac{6g}{1-\lambda}\frac{p}{q}$; vnde patet, hanc celeritatem directe proportionalem eſſe altitudini Barometri p, reciproce vero denſitati aëris q; tum vero, auctam ob humiditatem λ, celeritatem c etiam augeri. Conſtat autem in pedibus Rhenanis eſſe $6g = 93\frac{3}{4}$. Iſtius igitur formulae radix quadrata dabit celeritatem gyrationis in paribus pedibus expreſſam: Indicabit enim numerum pedum, qui hac celeritate vno minuto ſecundo percurrerentur.

§. 24. Cum calor a celeritate procul dubio pendeat, indagemus iſtam celeritatem tam pro maximo calore, qui in aëre aperto obſeruari ſolet, et qui in Thermometro *Delisliano* reſpondet quaſi centum gradibus, quam pro ſummo frigore, quod reſpondet 200 gradibus in eodem Thermometro. Pro priore ergo caſu, quia aër eſt rariſſimus, ſumamus $q = \frac{1}{1000}$, ſimulque ipſi p ſummam altitudinem tribuamus, quae eſt quaſi 34 pedum in Barometro aqueo. Ipſam humiditatem vero hic penitus negligamus, vt ſit $\lambda = 0$. Ex his iam valoribus colligitur

$$cc = 93{,}75 \times 34 \times 1000 = 3187500,$$

ideoque ipſa celeritas $c = 1790$ ped. quae ergo reſpondet 100 gradibus Thermometri *Delisliani*.

§. 25.

§. 25. Simili modo pro ſummo frigore 200 gradibus reſpondente, ſumamus denſitatem $q = \frac{1}{700}$, altitudinem vero Barometri etiam minimam accipiamus, ſcilicet $p = 31$ pedum, hincque colligitur

$$cc = 93,75 \times 31 \times 700 = 2034375,$$

ideoque $c = 1330$, quae ergo celeritas ducentis gradibus Thermometri *Delisliani* reſpondet, ita vt differentia inter has duas celeritates ſit 360 pedum. Hinc intelligitur, ſi plura huiusmodi experimenta inſtituantur, haud difficile fore pro ſingulis gradibus huius Thermometri reſpondentes celeritates aſſignare. Quo pacto iſtud Thermometrum ad multo maiorem perfectionis gradum euehetur.

§. 26. Eodem modo etiam reliqua inſtrumenta, quibus aëris indoles explorare ſolet, beneficio noſtrae formulae magis perfici poterunt. Quod quidem ad Barometrum attinet, id vix vila emendatione indiget, ſi modo pro quouis caloris gradu ratio denſitatis mercurii habeatur; quo enim mercurius minorem habuerit denſitatem, quod ſit in magno calore, tum altitudo barometrica ſecundum eandem rationem imminui debet, vt ad certam denſitatem fixam reuocetur. Summo autem frigore, quo Mercurius in ſpatium aliquanto minus contrahitur, ideoque eius denſitas augetur, ob hanc rationem altitudo Barometri obſeruata aliquantillum augeri debebit.

§. 27. Praecipuum autem inſtrumentum, quod ad Theoriam noſtram explorandam requiritur, eſt Manometrum, nunc quidem fere prorſus obſoletum, quo denſitas aëris indicatur, et cuius deſcriptio exſtat in *Wolſii*

Elementis Matheſeos Tomo II, vt et in *Mémoires de l'Académie Royale de Paris* 1705. Pro uſu autem noſtro optandum eſſet, vt gradibus arbitrariis in tali inſtrumento ſignatis adſcriberentur numeri, indicantes, quoties denſitas aëris minor ſit quam denſitas aquae, quam tanquam fixam ſpectare poſſumus, quippe cuius exiguae variationis, a maiore vel minore calore oriundae, ratio facile haberi poterit. Pluribus autem experimentis erit opus, antequam hoc inſtrumentum ad ſummum perfectionis gradum perducatur.

§. 28. Supereſt autem adhuc inſtrumentum, humiditati aëris dimetiendae aptum, quod Hygrometrum appellare ſolet. Plura huiusmodi inſtrumenta paſſim exſtant deſcripta; verum valde dubitandum videtur, num veram aquae quantitatem, per aërem diſperſam, declarent. Interim tamen plurimis etiam nouis experimentis opus erit, haec inſtrumenta ita inſtruere, vt quouis tempore verum valorem noſtrae litterae λ, hoc eſt eam fractionem, quae indicet, quotam totius voluminis partem aqua ſeu humiditas in aëre occupet, doceat, a quo perfectionis gradu etiamnunc plurimum ſumus remoti.

§. 29. Cum igitur in Thermometro *Deliſliano* gradui 200, quo inſigne frigus indicatur, reſpondeat celeritas 1430 pedum in minuto ſecundo, quia congelatio Mercurii adhuc maiorem gradum frigoris poſtulat, ei circiter reſpondebit celeritas 1200 ped. ita vt, niſi celeritas iſta fuerit maior, Mercurius fluiditatem penitus amittat. Deinde cum gradui 100 reſpondeat celeritas 1790 pedum, quia terminus congelationis in gradum 150 cadit,

cui

cui ergo reſpondebit celeritas 1610 ped., celeritate maiore opus erit, ad aquam in ſtatu fluiditatis conſeruandam.

§. 30. Quia porro gradus ebullitionis aquae in hoc Thermometro eſt 0, ei propemodum conueniet celeritas 2150 ped. vbi ergo aqua ebullire incipiet. Et quia in noſtra formula altitudo Barometri potiſſimum ingreditur, hinc intelligere licet, cur, aucta aëris elaſticitate, maior gradus ad ebullitionem aquae requiratur, et cur, minuta elaſticitate, aqua etiam in minore gradu caloris ebullire queat, quemadmodum experimentis eſt comprobatum, cuius phaenomeni ergo cauſſa in noſtra formula ſine dubio erit quaerenda.

§. 31. Neque vero celeritas, ad quemuis caloris gradum aëri inducendum requiſita, tantum ad aërem ſpectare eſt cenſenda, cuius ſcilicet minimae particulae tanta celeritate commoueri debent, ſed etiam in omnibus plane corporibus perinde locum habere videtur. Omnes quoque naturae ſerutatores in hoc conueniunt, quod cauſſa caloris in motu quodam perniciſſimo minimarum particularum conſiſtat. Quae ergo ſententia non ſolum noſtrae Theoriae maxime eſt conformis, ſed etiam ipſam celeritatem, cuilibet gradui caloris conuenientem, aſſignare valemus. Quanquam autem haec celeritas maxime enormis videatur, tamen perpendendum eſt, in natura dari celeritates adhuc incomparabiliter maiores, cuiusmodi eſt celeritas radiorum lucis, in quibus cum cauſſa omnis caloris ſit quaerenda, mirum non eſt, hinc tam inſignem celeritatis gradum generari poſſe.

§. 32.

§. 32. Sed reuertamur ad noſtram formulam ſupra inuentam et ad ſolum aërem proprie accommodatam, quae haec quatuor elementa: 1°) altitudinem preſſioni debitam p; 2°) denſitatem aëris q; 3°) gradum caloris, formula $\frac{cc}{6g}$ contentum et 4°) gradum humiditatis λ complectitur. Ex datis horum elementorum ternis quibusque quartum aſſignari poteſt; ita, ſi dentur denſitas aëris q, gradus caloris $\frac{cc}{6g}$, cuius loco br. gr. ſcribamus b et gradus humiditatis λ, hinc altitudo, preſſioni debita, p in genere ita exprimitur, vt ſit $p = b\, l\, \frac{1-\lambda q}{1-q}$, quam pro faciliori calculo in hanc ſeriem reſoluimus:

$$p = b((1-\lambda)\, q + \tfrac{1}{2}(1-\lambda\lambda)\, qq + \tfrac{1}{3}(1-\lambda^3)\, q^3 + \text{etc.})$$

cuius applicatio iam ſatis eſt expoſita.

§. 33. Ponamus nunc dari primo altitudinem preſſioni debitam p, ſecundo denſitatem aëris q, et tertio humiditatem λ, hinc gradus caloris $b = \frac{cc}{6g}$ ita definitur, vt ſit $b = \frac{p}{l\, \frac{1-\lambda q}{1-q}}$, hincque, logarithmis per ſeriem expreſſis, erit

$$b = p : ((1-\lambda)\, q + \tfrac{1}{2}(1-\lambda\lambda)\, qq + \tfrac{1}{3}(1-\lambda^3)\, q^3 + \text{etc.})$$

cuius ſeriei plerumque ſufficit ſolum primum terminum cum ſecundo ſumſiſſe.

§. 34. Sin autem detur altitudo preſſioni debita p, menſura caloris b, ac tertio humiditas λ, inde ad denſitatem q inueniendam recurrendum eſt ad exponentialia, cum ſit $e^{\frac{p}{b}} = \frac{1-\lambda q}{1-q}$, vnde poſito br. gr. $e^{\frac{p}{b}} = k$, erit $q = \frac{k-1}{k-\lambda}$,

et

et quia b plerumque plurimum excedit p, cum per ſeriem ſit

$$k = 1 + \frac{p}{b} + \frac{pp}{2bb} + \frac{p^3}{6b^3} + \text{etc.}$$

erit

$$q = \left(\frac{p}{b} + \frac{pp}{2bb} + \frac{p^3}{6b^3} + \text{etc.}\right) : \left(1 - \lambda + \frac{p}{b} + \frac{pp}{2bb} + \frac{p^3}{6b^3} \text{ etc.}\right)$$

§. 35. Denique ſi detur altitudo preſſioni debita p, menſura caloris b, et denſitas q, per formulam exponentialem $e^{\frac{p}{b}} = k = \frac{1-\lambda q}{1-q}$ humiditas λ ita determinetur, vt ſit $\lambda = \frac{1-k(1-q)}{q}$, quae expreſſio hoc laborat defectu, vt minimus error, in elementis datis p, k et q commiſſus, enormes errores in valore λ producat.

§. 36. Imprimis autem noſtra formula commodiſſime adhiberi poteſt ad Problema aërometricum maximi momenti reſoluendum, quo quaeri ſolet, quanta vi opus ſit ad aërem in ſpatium quantumuis minus coarctandum, cuius ergo ſolutionem hic ſubiungimus.

Problema.

Inueſtigare, quanta vis requiratur, ad datum aëris volumen in ſpatium quantumuis minus comprimendum.

Solutio.

§. 37. Ponamus aërem comprimendum in tubo cylindrico contineri, cuius amplitudo ſit $= ff$ et compreſſionem per emboli intruſionem produci: tum ſi altitudo, preſſioni debita, fuerit $= p$, vis requiſita aequabitur

 ponde-

ponderi columnae aqueae, cuius baſis $= ff$ et altitudo $= p$, ita vt iſta vis per maſſam aqueam expreſſa ſit $= ffp$. Ponamus in ſtatu naturali, vnde compreſſio inchoat, altitudinem preſſioni debitam eſſe $= a$, denſitatem vero aëris naturalem $= b$; at vero menſurae caloris cum humiditate, quoniam durante compreſſione nullam mutationem patiuntur, ſint vt ante h et λ, ita vt ſit $a = h\,l\,\frac{1-\lambda b}{1-b}$, ſiue proxime $a = (1-\lambda)\,b\,h$.

§. 38. Ponamus nunc intruſione emboli iſtud aëris volumen iam in ſpatium n vicibus minus eſſe compreſſum, ita vt iam eius denſitas ſit $q = nb$, vnde quaeri debet altitudo preſſioni debita p, huic denſitati reſpondens, que ergo, loco q ſcribendo nb, erit $h\,l\,\frac{1-\lambda nb}{1-nb}$; vnde niſi compreſſio iam ſatis ſit notabilis, ſatis exacte erit $p = h(1-\lambda)\,nb$. Hinc patet, preſſionem p exacte proportionalem eſſe numero n, ſiue preſſionem ſemper denſitati eſſe proportionalem, niſi compreſſio iam ſit vehementer magna.

§. 39. In maioribus autem compreſſionibus adhiberi etiam conueniet ſecundum ſeriei terminum, ita vt ſit

$$p = h\left((1-\lambda)\,nb + \tfrac{1}{2}(1-\lambda\lambda)\,nnbb\right),$$

cum initio fuiſſet $p = a$, quae ergo altitudo quanto iam ſit maior, definiri debet ex hac formula:

$$\frac{p}{a} = n + \tfrac{1}{2}(1+\lambda)\,nnb;$$

vnde patet, vim comprimentem plusquam n vicibus eſſe maiorem, prorſus vti per experimenta eſt obſeruatum.

§. 40.

§. 40. Sin autem compreſſio longe vlterius continuari concipiatur, recurrendum erit ad formulum logarithmicam $p = b\,l\,\frac{1-\lambda nb}{1-nb}$, quae, comparata cum preſſione initiali $a = b\,l\,\frac{1-\lambda b}{1-b}$, dabit

$$\frac{p}{a} = l\,\frac{1-\lambda nb}{1-nb} : l\,\frac{1-\lambda b}{1-b}.$$

Quia autem poſterior logarithmus eſt ſatis exacte $(1-\lambda)b$, erit

$$\frac{p}{a} = \frac{1}{(1-\lambda)b} \cdot l\,\frac{1-\lambda nb}{1-nb};$$

vnde patet, caſu $nb = 1$ ſiue $n = \frac{1}{b}$, vim requiſitam fieri infinitam.

§. 41. Quo haec clarius perſpiciantur, ponamus pro ſtatu initiali eſſe $b = \frac{1}{800}$, ſiue denſitatem aëris ad aquae denſitatem eſſe vt 1 ad 800, humiditatem autem λ penitus deponamus, eritque ergo a preſſio Atmoſpherae naturalis, et quaeramus nunc, quotuplo maior preſſio requiratur ad aëris volumen in ſpatium n vicibus minus coarctandum; tum igitur formula ante data nobis praebebit, $\frac{p}{a} = 800\,l\,\frac{800}{800-n}$, vbi logarithmis vtendum erit hyperbolicis. Ita ſi aër in ſpatium quadringenties minus comprimatur, hoc eſt, ſi $n = 400$, fiet $\frac{p}{a} = 554$; ſcilicet vis, quae tantum eſſet quadringenties maior, non ſufficit, ſed requiritur vis 554 vicibus maior. Quodſi autem condenſatio in ſpatium 700^{es} minus poſtulatur, vi opus erit 1663 vicibus maiore.

§. 42. Operae igitur pretium videtur, pro hac hypotheſi $b = \frac{1}{800}$ et $\lambda = 0$ tabulam conſtruere, indicantem, quotuplo maior fiat vis comprimens requiſita ad aërem

 in

in ſpatium n cuplo minus redigendum. Sequens tabula igitur oſtendet pro ſingulis numeris n valorem formulae

$$\frac{p}{a} = 800\, l \frac{800}{800 - n},$$

vbi pro condenſationibus minoribus erit

$$\frac{p}{a} = n + \frac{1}{2} \frac{nn}{800} + \frac{1}{3} \frac{n^3}{800^2},$$

ita vt tantum logarithmis hyperbolicis indigeamus, quando numerus n vltra 100 aſſurgit.

n	$p:a$	n	$p:a$
1	1, 0006	125	135, 92
2	2, 0025	150	166, 11
3	3, 0056	175	197, 49
4	4, 0100	200	230, 14
5	5, 0157	225	264, 19
6	6, 0226	250	299, 75
7	7, 0308	275	336, 97
8	8, 0403	300	376, 00
9	9, 0510	350	460, 28
10	10, 063	400	554, 48
20	20, 254	450	661, 34
30	30, 577	500	784, 64
40	41, 035	550	930, 52
50	51, 630	600	1109, 0
60	62, 369	650	1339, 2
70	73, 254	700	1663, 5
80	84, 288	750	2218, 1
90	95, 477	800	infinit.
100	106, 82		

§. 43.

§. 43. Manifeſtum eſt vires, ad aërem comprimendum requiſitas, in hac tabula exhibitas, iam in ſe complecti preſſionem Atmoſphaerae; vnde ſi tantum vires actu adhibendae quaerantur, ſubtrahi debet inde illa preſſio, ſeu, quod eodem redit, ab omnibus his viribus ſubtrahi debet vis caſui $n = 1$ reſpondens. Praeterea ob humiditatem, quam hic neglexinus, omnes vires hic deſignatae aliquod incrementum nanciſcuntur; ſcilicet, ſi pro compreſſione n cupla vis fuerit $= n + \pi$, ob humiditatem λ iſta vis erit $n + (1 + \lambda) \pi$.

De variatione ſtatus aëris per vniuerſam Atmoſphaeram.

§. 44. Quae hactenus ſunt tradita ad aërem in certo loco exiſtentem reſtringuntur. Nunc autem videamus, qua lege ſtatus aëris per Atmoſphaeram ſiue aſcendendo ſiue deſcendendo immutetur. Hic igitur in certo Terrae loco A ſtatum aëris tanquam cognitum aſſumemus, hincque verticaliter aſcendendo inueſtigabimus, quomodo pro quauis altitudine $AZ = z$, ſtatus aëris ſe ſit habiturus; vbi euidens eſt, ſi ad interiora Terrae deſcendere velimus, altitudinem z tantum negatiuam eſſe accipiendam. Hic igitur ante omnia pro loco fixo A ſtatum aëris definiri oportet, ſiquidem pro quauis altitudine $AZ = z$ elementa calculi cum hoc loco comparari conueniat. Tab. IV. Fig. 3.

§. 45. Sit igitur primo altitudo Barometri aquei pro loco $A = a$, et pro loco $Z = p$; ſecundo denſitas aëris in A ſit $= b$, in Z vero $= q$; tertio ſit humiditas in $A = \lambda$,

in Z vero $= \Phi$; quarto denique ponatur celeritas motus gyratorii in ſubſidium vocati pro loco A $= c$, pro Z vero $= u$. Tum vero pro loco A ſit breuitatis gratia $\frac{cc}{6g} = b$, pro loco Z autem ſit $\frac{uu}{6g} = v$; vbi notetur, quantitates b et v longitudinem plurium millium pedum deſignare, propterea quod celeritas c plerumque inter terminos 1400 et 1800 pedum continetur. Quia igitur valores litterae c iam ad gradus Thermometri relatos aſſumimus, pro praecipuis valoribus celeritatis c valores quantitatis b in ſequenti tabula adiungamus, incipiendo a $c = 1200$ vsque ad $c = 2000$ per 50 aſcendendo:

c	b	c	b
1200	15360	1650	29040
1250	16667	1700	30827
1300	18026	1750	32667
1350	19440	1800	34560
1400	20907	1850	36507
1450	22427	1900	38507
1500	24000	1950	40560
1550	25627	2000	42667
1600	27307		

§. 45. Quia denſitas aëris aſcendendo decreſcit, euidens eſt, ſolum primum terminum ſeriei ſupra datae abunde ſufficere; vnde ſtatuere licebit $p = (1 - \Phi) v q$, quae formula etiam tuto adhiberi poterit, ſi in viſcera terrae deſcendamus. Hinc igitur denſitas in loco Z erit $q = \frac{p}{(1 - \Phi) v}$, vnde ſi per elementum $Zz = dz$ vlterius aſcendamus, preſſio in z erit $p + dp$, quae autem minor erit

erit quam in Z ponduſculo aëris in interuallo Zz contenti, quod reperiemus, ſi elementum dz per denſitatem q multiplicemus, vnde fit $dp = -q\,dz$. Ergo, loco q ſubſtituto valore modo dato erit $dp = -\frac{p\,dz}{(1-\Phi)v}$, hincque $dz = -\frac{(1-\Phi)v\,dp}{p}$, quae aequatio, quia tam v quam Φ tanquam functiones altitudinis z ſunt ſpectandae, ita repraeſentari debet: $\frac{dz}{(1-\Phi)v} = -\frac{dp}{p}$, cuius integrale eſt

$$\int \frac{dz}{(1-\Phi)v} = C - lp,$$

quam conſtantem C ita definiri oportet, vt caſu $z = o$, quo ſimul integrale $\int \frac{dz}{(1-\Phi)v}$ euaneſcere debet, euadat $p = a$, vnde erit $C = la$, ideoque $\int \frac{dz}{(1-\Phi)v} = l\frac{a}{p}$.

§. 46. Siniſtrum igitur membrum huius aequationis erit certa functio ipſius z, pendens a ratione, ſecundum quam tam calor quam humiditas aſcendendo ſiue creſcit ſiue decreſcit; membrum vero dextrum tantum altitudinem barometricam tam in A quam in Z inuoluit, cuius logarithmus hyperbolicus ſumi debet. Atque hic perinde eſt, ſiue altitudo Barometri aquei ſiue mercurialis in calculum introducatur, quia fractio $\frac{a}{p}$ inde non mutatur. Cum igitur ſit $l\frac{a}{p} = la - lp$, valores horum logarithmorum hyperbolicorum pro ſingulis altitudinibus Barometri mercurialis, quae per digitos indicari ſolent, in ſequenti tabula ab altitudine 36 pollicum, ad quam certe infra Terram deſcendendo nunquam peruenietur, diminuendo per ſemipollices, exhibeamus:

Alt.

Alt. Bar.	Logar. hyperb.	Alt. Bar.	Logar. hyperb.	Alt. Bar.	Logar. hyperb.
36,0	3.583519	26,0	3,258097	16,0	2,772589
35,5	3,569533	25,5	3,238679	15,5	2,740840
35,0	3.555348	25,0	3,218876	15,0	2,708050
34,5	3,540960	24,5	3,198673	14,5	2,674149
34,0	3,526361	24,0	3,178054	14,0	2,639057
33,5	3,511545	23,5	3,157001	13,5	2,602690
33,0	3,496508	23,0	3,135494	13,0	2,564949
32,5	3,481240	22,5	3,113515	12,5	2,525729
32,0	3,465736	22,0	3,091042	12,0	2,484907
31,5	3,449988	21,5	3,068053	11,5	2,442347
31,0	3,433987	21,0	3,044522	11,0	2,397895
30,5	3,417727	20,5	3,020425	10,5	2,351375
30,0	3,401197	20,0	2,995732	10,0	2,302585
29,5	3,384390	19,5	2,970415	9,5	2,251292
29,0	3,367296	19,0	2,944439	9,0	2,197225
28,5	3,349904	18,5	2,917771	8,5	2,140066
28,0	3,332205	18,0	2,890372	8,0	2,079442
27,5	3,314186	17,5	2,862201	7,5	2,014903
27,0	3,295837	17,0	2,833213	7,0	1,945910
26,5	3,277145	16,5	2,803361	6,5	1,871802

Hic perinde eſt quanam digitorum menſura vti velimus, quia tantum ratio in computum ingreditur.

§. 47. Quod ſi tam calor quam humiditas per totam altitudinem z conſtans aſſumatur, vt ſit $v = b$ et $\phi = \lambda$, aequatio noſtra integralis erit $\frac{z}{(1-\lambda)b} = l\,\frac{a}{p}$, vnde pro quauis altitudine barometrica altitudo $AZ = z$ innoteſcit,

teſcit, cum ſit $z = (1 - \lambda) b l \frac{a}{p}$. Viciſſim vero pro altitudine A Z data, poſito

$$e^{\frac{z}{(1-\lambda)b}} = y, \text{ erit } y = \frac{a}{p}, \text{ ideoque } p = \frac{a}{y}.$$

Quia autem haec fractio $\frac{z}{(1-\lambda)b}$ eſt plerumque quam minima, erit proxime

$$\frac{1}{y} = 1 - \frac{z}{(1-\lambda)b} + \frac{zz}{2(1-\lambda)^2 bb} - \text{etc.}$$

ideoque

$$p = a\left(1 - \frac{z}{(1-\lambda)b} + \frac{zz}{2(1-\lambda)^2 bb} - \frac{z^3}{6(1-\lambda)^3 b^3} + \text{etc.}\right)$$

§. 48. Hic autem caſus vix vsquam locum habebit: certum enim eſt, per Atmoſphaeram aſcendendo, gradum caloris continuo diminui. Etſi autem ratio diminutionis maxime latet, tamen non multum a veritate aberrabimus, ſi valorem ipſius v hoc modo repraeſentemus: $v = \frac{h}{1 + \frac{z}{f}}$, ita vt in altitudine $z = f$ valor ipſius v ad dimidium redigatur; tum enim, cognita hac altitudine f, iſta formula vix a veritate aberrare poterit. Hanc ob rem ſumamus $v = \frac{hf}{f + z}$, humiditatem vero per totam altitudinem inuariatam ſpectemus, vt ſit $\phi = \lambda$, quia plane non conſtat, quomodo variatio humiditatis in calculum introduci poſſet, cuius etiam effectus vix ſenſibilis eſſe poteſt, quia maximus valor ipſius λ nunquam $\frac{1}{30}$ ſuperare poſſe videtur.

§. 49. His igitur valoribus ſubſtitutis aequatio noſtra erit

$$\frac{1}{b(1-\lambda)} \int \frac{(f+z)\,dz}{f} = l\,\frac{a}{p},$$

 vnde

vnde integratione inſtituta erit

$$\frac{1}{(1-\lambda)b}\left(z+\frac{zz}{2f}\right)=l\,\frac{a}{p},$$

ex qua aequatione, ſi modo conſtet altitudo f, vbi menſura caloris v ad dimidium redigitur, ad quamuis altitudinem z aſſignari poterit altitudo barometrica p.

§. 50. Hic autem occurrit quaeſtio maximi momenti, quomodo pro quauis altitudine Barometri, ſupra Terram aſcendendo obſeruata, inde ipſa eleuatio loci, ſiue altitudo $AZ=z$ definiri poſſit. Euidens autem eſt, talem concluſionem ex ſola altitudine Barometri neutiquam deriuari poſſe, niſi ſimul innoteſcat quantitas illa f. Quod ſi autem inſuper in Z obſeruetur altitudo Thermometri, ex ea valor ipſius v concludi poterit, quandoquidem hic aſſumere licet, pro quolibet gradu Thermometri innoteſcere celeritatem motus gyratorii c, ſiue noſtro caſu u, vnde fit $v=\frac{uu}{6g}$. Inuento igitur vero valore ipſius v, ob $v=\frac{fb}{f+z}$, erit viciſſim $f=\frac{vz}{b-v}$, qui valor in noſtra poſtrema aequatione ſubſtitutus dabit hanc: $\frac{(b+v)z}{2(1-\lambda)bv}=l\,\frac{a}{p}$, conſequenter habebimus $z=\frac{2(1-\lambda)bv}{b+v}\,l\,\frac{a}{p}$.

§. 51. Ope igitur huius formulae per ſolas obſeruationes barometricas et thermometricas eleuatio cuiusque loci ſuper horizontem aſſignari poterit, quae, cum ſit $b=\frac{cc}{6g}$ et $v=\frac{uu}{6g}$, ita ſe habebit: $z=\frac{2(1-\lambda)buu}{cc+uu}\,l\,\frac{a}{p}$; vnde ſi Thermometrum iam ſit inſtructum, vti ſupra monuimus, quaeuis altitudo ſatis facile aſſignari poterit ope obſeruationum barometricarum et thermometricarum. Ac ſi pro z prodeat valor negatiuus, quod euenit quando $p>a$, inde profunditas infra ſuperficiem Terrae pateſcet.

§. 52.

§. 52. Quia autem celeritatum *c* et *u* valores adhuc quandam incertitudinem inuoluunt, propterea quod obſeruationes multo accuratiores requirunt, quam quidem inſtituere licet, optandum eſſet, vt noſtra formula primum ad caſus tales, vbi eleuatio loci aliunde iam eſt cognita, applicetur; hinc enim facile accuratiores determinationes litterarum *c* et *u* concludi poterunt; hocque pacto ſimul conſtructio Thermometrorum ad maiorem perfectionis gradum perducetur. Qui autem indolem noſtrarum formularum omni ſtudio perpendere dignabitur, longe plura ad ſcientiam naturalem promouendam inde deriuare poterit.

DESCRIPTIO INSTRVMENTI AD DECLIVITATEM LOCORVM MENSVRANDAM APTI.

Auctore
P. INOCHODSOF.

In operationibus Geodeticis, circa communicationem Wolgae et Tanais explorandam inſtitutis, adhibuimus peculiare inſtrumentum, cuius ope non ſolum diſtantias horizontales omnium linearum pro baſi aſſumtarum, ſed etiam earum decliuitates, vt eleuationem vnius extremitatis ratione alterius notam haberemus, atque ſectiones aluei Camyſchenkae cum ſucceſſu menſurauimus. Succinctam huius inſtrumenti deſcriptionem, ob ſingularem eius ſtructuram, et praeſertim quum iſtud in nonnullis caſibus libellationi fluuii Newae propediem ſuſcipiendae inſeruire poteſt, non ingratam fore confidimus.

Tab. V. Fig. 1. Adpoſita figura repraeſentat hoc inſtrumentum: A C B eſt aſſis ex ligno duro et probe exſiccato parata, cuius craſſities ſeſquipolicem non excedit; longitudo vero cum cruribus ipſi ad angulos rectos ſubnexis aliquantum excurrit pedes Londinenſes decem. Altitudo crurum A F, B D,

B D, ab inferiori aſſis parte duorum pedum; extremitatibus eorum affixi ſunt coni ex orichalco tornati, quorum cuſpides decem pedes exacte diſtant. Prope conorum vertices prominent orbiculi, determinaturi quousque crura terrae defigenda ſint; quod in qualibet inſtrumenti collocatione probe aduertendum: ſin autem occurrat ſolum durum, cuſpides ſolummodo ponendi, et bene notetur veſtigium cruris anterioris, vt ſequens in eodem puncto locetur. Poſſunt etiam hi coni ad dictam normam ex ferro parari viliori pretio. Aſſis et crura, ne mutationem a humore ſubeant, pigmento tinguntur.

F G H ſemicirculus orichalceus aſſi affixus, atque in gradus integros et dimidios diuiſus, quibus ad vitandam angulorum confuſionem numeri ſerie interrupta adſcripti.

K M N regula orichalcea, facile mobilis ſupra axem chalybeum bene poſitum, et centro ſemicirculi inſertum, cui illa, ne decidat, peculiari cochlea M adnectitur. Pars regulae ſuperior geſtat Nonnium, cuius beneficio ſingula minuta prima aeſtimari poſſunt. Vt ambae diuiſiones circuli ac Nonnii propius ad ſe inuicem accedant, pars haec aliquantum reclinata. Inferiori vero extremitati adplicatum eſt pondus X, regulam in ſitu verticali ſemper tenens: conſtat illud duobus globis iunctis, quorum poſticus mouetur in canaliculo ſemicirculari excauato; atque ope cochleae *r*, per adnexas regulae laminas tranſeuntis, promouetur vel remouetur, prout res exigit, vsque dum initium Nonnii gradui 90mo, in ſitu

inſtrumenti horizontali, exacte reſpondeat. Hoc modo alteratio ex quacunque cauſſa orta corrigenda eſt.

Collocato inſtrumento ſuper ſolo decliui, regula oſtendit gradus et minuta inclinationis; quam obſeruationem maioris certitudinis gratia, excitata regula repetere licet.

Ante operationem ipſam ſequens verificatio inſtituitur. Locatis principio cruribus D ad dextram et E ad ſiniſtram, notetur decliuitas ſoli, deinde permutatis crurum locis inſtrumentum obuertatur et angulus inclinationis denuo obſeruetur. Dimidium exceſſus vel defectus horum angulorum a duobus rectis indicat errorem, quo anguli obſeruati minuendi vel augendi ſunt. Poteſt etiam hic error, ſi placet, ope cochleae *r* tolli, vt ſupra notatum.

In menſurandis diſtantiis deſignatur funiculo linea recta, ad quam locatur et tranſportatur inſtrumentum, ita vt crus poſterius veniat in locum anterioris.

Alterutrum extremum A vel B priorem occupare poteſt locum, modo vnum idemque ad finem vsque lineae praeeat. Duo homines illud transportant, et tertius obſeruat, vt crura iuſto modo ponantur, ſimulque capit decliuitatis angulos.

Tab. V. Fig. 2. Ex figura 2da liquet $D = L \operatorname{coſ.} \phi$, $E = L \operatorname{ſin.} \phi$; tum vero pro ϕ ſumitur hic $90° \pm \phi$ et

$$\operatorname{ſin.} (90° \pm \phi) = \operatorname{coſ.} \phi; \quad \operatorname{coſ.} (90° \pm \phi) = \operatorname{ſin.} \phi.$$

Hinc

Hinc

$$D = L\ \text{ſin.}\ (90^\circ \pm \phi) \quad \text{et} \quad E = \pm L\ \text{coſ.}\ (90^\circ \mp \phi).$$

Hoc eſt diſtantia horizontalis intra pedes inſtrumenti obtinebitur, ſi longitudo ipſius per coſinum anguli obſeruati multiplicetur, eſtque ſemper poſitiua; quantitas vero decliuitatis habebitur, ſi eadem longitudo in coſinum dicti anguli ducatur, et ſit modo poſitiua modo negatiua, provt angulus acutus vel obtuſus ſit.

Quia longitudo inſtrumenti 10 pedum, diſtantiam horizontalem ſinus, et decliuitatis altitudinem coſinus angulorum obſeruatorum ex tabulis depromti indicabant, poſita prima illorum figura pro numero pedum integro.

Quod ſi extremum diſtantiae menſurandae integrum inſtrumentum non capiat, reſiduum ſeorſim dimetiendum erit: poſito crure anteriori in ipſa lineae extremitate A (fig. 3.), notetur intervallum $a a'$ et habebitur: Tab. V. Fig. 3.

$d = a\,a'$ ſin. inclin.

$e = a\,a'$ coſin. inclin.;

vbi prima cifra ſinus et coſinus pro parte pedis decima ſumenda eſt.

TVBI

TVBI ICONANTIDIPTICI
SIVE
DVPLICANTIS EMENDATIO.

Auctore

C. G. KRATZENSTEIN.

In transactionibus anglicanis clariſſ. *Ieaurat* nuper deſcripſit conſtructionem tubi optici, cuius binae imagines obiectorum ſub regulari progreſſione tubi aut obiecti campum tubi ab vtroque latere ſimul intrant, ſibi obuiam eunt, in axi coincidunt, deinde contrariis directionibus diſcedunt et demum ſimul in oppoſitis lateribus e campo tubi egrediuntur.

Eiusmodi tubum in obſeruationibus aſtronomicis nocturnis, praeſertim in itinere inſtituendis, diu exoptatum obſeruatori commodum praeſtare poſſe quisque rerum peritus haud difficulter perſpiciet. Quodſi enim eiusmodi tubus pro ſimplici in quadrante aſtronomico ſubſtituatur, aut in inſtrumento culminatorio adhibeatur, nec reticulo aut filo in foco obiectiui, nec illuminatione huius fili amplius opus erit; ſiquidem exacta vtriusque imaginis coniunctio indicat, obiectum haerere in axi prolongato tubi. Contactus limborum vtriusque imaginis inter

ſe,

ſe, (e. g. ſolaris) in congreſſu et digreſſu et tempus interceptum inter vtrumque contactum eadem momenta & obſeruationis requiſita ſuppeditat aſtronomo, quaſi is adpulſum vtriusque limbi ad ſitum reticuli obſeruaſſet. Valde autem incommoda eſt in obſeruationibus nocturnis filorum reticuli illuminatio. Non ſolum enim in vſu quadrantis vmbraculo vel alio munimento opus eſt, ne oculi ſimul colluſtrentur et ad conſpiciendas ſtellas inepti reddantur, ſed quoque ſocio plerumque opus eſt, illuminationis negotium peragente. In culminatorio quidem adparatus illuminationis paullo commodius ipſi tubo inſiſtere poteſt, ipſae tamen fixae primae magnitudinis prope horizontem obſeruandae coelo licet ſereno diſparent, quam primum filum reticuli illuminatur. De hoc impedimento iam olim conqueſtus eſt celeberr. *Monnier* in praefatione ad hiſtoriam coeleſtem pag. 23. Haud inutile negotium itaque me ſuſcipere confido, tentando, anne hanc tubi optici ſpeciem eousque perficere liceat, vt eadem aeque commode ac vulgaris tubus aſtronomicus inſtrumentis, fixarum obſeruationibus deſtinatis, adplicari queat.

Diſpoſitionem lentium in tubo iconantidiptico, quam clariſſ. *Jeaurat* in transactionibus anglicanis expoſuit, figura 4 ſiſtit. Scilicet lens obiectiua A in medio perforata zona ſua exteriori imaginem obiecti inuerſam in ſuo foco D depingit. Altera lens obiectiua minor *a* eiusdem obiecti imaginem inuerſam, ſed minorem, in ſuo foco B ſiſtit. Hanc imaginem erigit et per foramen lentis A in huius focum proiicit lens C, cuius focus parallelorum in Φ incidit. Eadem ſimul imaginem B imagini lentis A aequalem reddit. Vt huic intentioni ſatisfiat, clariſſ. Auctor

Tab IV. Fig 4.

tor ſequentes commendat focorum et interuallorum proportiones: ſit e. g. diſtantia foci lentis A 12 pedum = 144″; erunt diſtantiae focales lentium *a* et C = 34″; interualla *a* B = *a* C = 34″; B C = 42″, 02; inde reſultabit tota tubi longitudo *a* D = 254″ = 21′, 2″. Ita quidem erecta imago in focum communem D proiecta $4\frac{1}{4}$ vicibus maior erit imagine prima B, et ſimul imagini inuerſae eiusdem obiecti in eodem foco aequalis. Eſt enim *a* B : A D = B C : C D.

Cum idem effectus multo compendioſiori et commodiori modo obtineri queat, mihi quidem videtur clar. inuentorem in hac diſpoſitione aut primam ſuam ideam tantummodo expoſuiſſe, aut magis perfectam huius tubi conſtructionem ſibi reſeruaſſe. In propoſita enim lentium diſpoſitione integer tubus duplo fere longior deuenit, quam ſubſidia optica id exigunt. Deinde e lente obiectiva maiori A media pars exſcindenda eſt, vt radii imaginem erectam formantes illud foramen tranſire queant. Denique imaginis primae B augmentum maius eſt illo, quod conditiones inſtrumenti expoſcunt; inde vero aberratio vltra neceſſitatem augetur.

Meum itaque negotium in perficiendo hoc tubo in eo verſabitur, vt 1) eius longitudo non ſuperet diſtantiam foci lentis obiectiuae principalis A; 2) Vt perforatione huius obiectiui non opus ſit; 3) Vt augmentum imaginis B per lentem C erectae minimum ſit, quod indoles huius tubi admittit. 4) Ne lens G H (*fig.* 5.) ima-
Tab. IV. Fig. 5 ginem inuerſam Φ erigens radios luminis ab obiectiuo maiori M N ad imaginem inuerſam D E miſſos intercipiat;

5) vt

5) vt tam inuerſa quam erecta obiecti imago in foco communi D E aequali propemodum claritate et magnitudine appareat; rigoroſa tamen vtriusque aequalitas non requiritur.

Vt ſingulis hiſce conditionibus ſimul ſatisfieri queat, primo loco ad datam tubi longitudinem augmentum diametri apparentis obiecti ipſi conueniens et apertura obiectiui minoris, quam illud augmentum expoſcit determinanda ſunt. Sint autem diſtantiae ſocales lentis obiectiuae maioris $MN = F$; (*fig.* 5.) minoris $AB = f$, lentis inuertentis $GH = \mathfrak{f}$, obiectiui compoſiti e lentibus MN et $AB = \Phi$, apertura lentis $MN = A$, lentis $AB = a$, lentis $GH = \alpha$, exceſſus foci huius lentis vltra focum $\Phi = e$, latitudo imaginis D E, quam campus tubi comprehendit $= c$, augmentum diametri apparentis $= m$, augmentum imaginis primae $\beta\Phi$ in ſoco communi D E, quod illam imagini inuerſae, quam lens M N ibidem depingit, aequalem reddit $= n$, ita, vt ſit $\Phi : F = 1 : n$. Quoniam in hoc tubo aberratio radiorum vtramque imaginem formantium paullo maior eſt ea, quam ſimplex obiectiuum producit, ſuadeo, vt augmentum datae longitudini tubi aut diſtantiae ſocali F in tabula hugeniana reſpondens ad dimidium reducatur, apertura vero longitudini reſpondens minori obiectiuo concedatur.

Datae itaque longitudini tubi F in digitis reſpondebit $a = 0,16\sqrt{F}$; diſtantia foci lentis ocularis

$$\omega = \tfrac{11}{5}\,a = 2,2\,a;\ m = \frac{F}{2,2\,a};\ c = \tfrac{1}{2}\,\omega = 1,1\,a.$$

Ita quidem minus augmentum tubi duplo maiori claritate

 obiecti

obiecti apparentis compenſabitur et minor imaginis praecifio minus erit ſenſibilis.

Quia vero augmentum n imaginis primae in foco ϕ depictae eo magis increſcit, quo maior campus tubi eiusdem longitudinis deſideratur, campus modo inuentus $c = 1, 1\,a$ in tubo quatuor pedum vltra duos Soles duasve Lunas complectens ſine detrimento vtilitatis tubi et cum lucro praeciſionis imaginis erectae ad eam amplitudinem reducitur, vt paullo plus, quam integrum Solem capiat. Cum enim teleſcopium huius indolis non niſi obſeruationibus aſtronomicis inſeruire poſſit, eiusmodi campus abunde ſufficiet. Statuendo itaque latitudinem imaginum in foco communi vtriusque obiectiui $D\,E = c = \frac{F}{100}$, angulus campi complectetur $34'$, $22''$. Inde prodibunt diameter imaginis primae huic campo reſpondentis

$$\beta\,\phi = \frac{\phi}{100} = \frac{F}{100 . n},$$

diuergentia radiorum extremorum huius imaginis centrum obiectiui A B tranſeuntium in loco lentis $G\,H = \frac{AG}{100}$, cui apertura lentis $G\,H = \alpha$ ſaltem aequalis eſſe debet, immo praeſtat, eam illa paullo maiorem eſſe, vt lens G H omnes radios illam imaginem formantes excipere queat. Ex altera autem parte diameter lentis G H vna cum ſua armilla non transgredi debet angulum A T B, ne radii ab obiectiuo maiori ad imaginem inuerſam D E tranſeuntes ab illa intercipiantur. Huic requiſito ſatisfiet faciendo G H vel $\alpha = \frac{c \cdot GT}{AT} = \frac{AG}{100}$. Eſt vero $A\,T = \frac{100\,a\,F}{100\,a + F}$. Quoniam interuallum $\phi\,D$ vnitate maius eſſe debet augmento n imaginis $\beta\,\phi$, erit

$$e + f = \frac{F - \phi}{n + 1} = \frac{F - (F : n)}{n + 1},$$ adeoque

A G

$$AG = \frac{F}{n} + \frac{F-(F:n)}{n+1} = \frac{2F}{n+1};$$

$$GT = \frac{100\,aF}{100\,a+F} - \frac{2F}{n+1}, \text{ et } GH = \frac{2F}{100.\,n+1} = \frac{a.GT}{AT};$$

vnde

$$\frac{2F.AT}{100\,a\,[AT - 2F:(n+1)]} = n+1,$$

et denique $n = \frac{4F}{100\,a} + 1$. Inuento autem augmento n, ſingula reliqua quaeſita dabuntur. In tubo enim iconantidiptico, cuius longitudo vel obiectiui maioris diſtantia focalis data $= F$, erit

$$\Phi = \frac{F}{n};\ e = \frac{F-\Phi}{(n+1)^2};\ e+\mathfrak{f} = \frac{F-\Phi}{n+1};\ \mathfrak{f} = en = \frac{n(F-\Phi)}{(n+1)^2};$$

$$GH = \alpha = \frac{2F}{100(n+1)};\ AG = \frac{2F}{n+1}.$$

Quia $e:\mathfrak{f} = e+\mathfrak{f}:DG$, erit diſtantia imaginis erectae in foco communi a lente $GH = DG = \frac{n}{n+1}.F - \Phi$. Vt eadem imago imagini inuerſae in foco communi aequalis ſit, neceſſe eſt, vt fiat $\Phi : F = e+\mathfrak{f} : DG$, adeoque

$$\frac{n}{n+1}.F - \Phi = \frac{F}{\Phi}.\,e+\mathfrak{f}.$$

Eſt vero

$$\frac{F}{\Phi} = n, \text{ et } e+\mathfrak{f} = \frac{F-\Phi}{n+1},$$

quibus ſubſtitutis pro $\frac{F}{\Phi}.\,e+\mathfrak{f}$ aequalitas vtriusque quantitatis eluceſcit. Conſtat itaque aequationes inuentas requiſitis huius tubi omnino ſatisfacere.

Ex inuenta diſtantia focali Φ obiectiui compoſiti e lentibus AB et MN diſtantia foci f lentis obiectiuae ſimplicis minoris AB nunc determinanda eſt, quae diſtantiam foci obiectiui maioris F ad diſtantiam Φ reducere valeat. Eſt vero ſecundum Dioptricae leges $\frac{Ff}{F+f} = \Phi$, adeoque $f = \frac{F\Phi}{F-\Phi} = \frac{F}{n-1}$.

Vt denique ambae imagines in foco communi ae-

quali claritate gaudeant, apertura obiectiui maioris A tanta eſſe debet, vt eius zona, obiectiuum minus ambiens aream aperturae huius lentis aequalem complectatur. Erit itaque $AA = 2\,aa$, adeoque $A = a\sqrt{2} = 1,4\,a$. Quia vero armilla obiectiuum minus ſuſtinens partem huius zonae tegit, eadem apertura pro varia craſſitie huius armillae ad $1,5\,a$ vel $1,6\,a$ augeri poterit.

Licet apertura obiectiui maioris in noſtro tubo maior ſit ea, quam tubus hugenianus eiusdem longitudinis admittit, inde tamen confuſionis imaginis ſenſibile augmentum non metuendum eſt. Erit enim illa in noſtro tubo ad eam in tubo hugeniano vt $\frac{A}{2\,\omega} : \frac{a}{\omega} = 3 : 4$.

In gratiam eorum, qui praxin opticam exercent, diſtantias focales lentium et interualla earum in duobus eiusmodi tubis iconantidipticis hic adiungam, quorum alter tripedalis quadranti aſtronomico, alter 4 pedum inſtrumento culminatorio adplicari poteſt. Poſita ſcilicet in primo diſtantia focali obiectiui maioris $F = 36''$, erit apertura eiusdem $A = 1'',5$; $n = 2\frac{1}{2}$; diſtantia foci obiectiui minoris $f = 24''$; apertura eiusdem $a = 0'',96$; diſtantia foci obiectiui compoſiti $\Phi = 14'',4$; lentis G H diſtantia foci $\mathfrak{f} = 5'',184$; interuallum $AG = 23'',04$; $e = 3'',456$; $e + \mathfrak{f} = 8'',64$; lentis G H apertura $\alpha = 0'',21$ ad $0'',25$; augmentum diametri apparentis $m = 17$; $\omega = 2'',11$.

In tubo meridiano ſit $F = 48''$. Huic conueniunt $a = 1'',09$; $A = 1'',6$ vel $1'',7$; $n = 2\frac{3}{4}$; $f = 27'',43$; $\Phi = 17'',45$; $\mathfrak{f} = 5'',973$; $e = 2'',17$; $e + \mathfrak{f} = 8'',14$; $AG = 25'',596$; denique $GH = \alpha = 0'',26$ ad $0'',3$; et $\omega = 2'',4$.

Haud

Haud quidem me fugit, diſtantias focales in praxi ea praeciſione non obtineri poſſe, quam calculus indicat; ſed neque indoles huius tubi eam exigit, quia in vſu eius nihil intereſt, vtrum ambae imagines in foco ocularis exacte aequales ſint nec ne. Interuallum enim temporis, quod inter ambos contactus limborum Solis aut Lunae intercedit, nihilo minus praeciſe idem manet, et coincidentia centrorum forſan melius diiudicari poteſt, ſi vna imago paullo minor et obſcurior fuerit altera, ac ſi ambae praeciſe aequales fuerint. Multo magis vero eo reſpiciendum eſt, vt ambae imagines exacte in eodem loco vel in eadem diſtantia a lente oculari diſtincte formentur, ne parallaxis ſenſibilis oriatur. Hunc in finem lens G H eadem ratione ſuſtineatur et per exiguum interuallum mobilis reddatur, qua ſpeculum oculare in teleſcopio gregoriano fulcitur et mouetur. Deinde in foco lentis ocularis filum ſimplex ſericum ita firmetur, vt eius minimae aſperitates ſine oculi intenſione diſtincte conſpiciantur. Directo nunc tubo ad obiectum aliquod acutum valde remotum et tecto obiectiuo minori lens ocularis cum ſuo filo ad illam diſtantiam ab obiectiuo maiori conſtituatur et firmetur, in qua parallaxis imaginis filum contingentis plane euaneſcit. Aperiatur deinde obiectiuum minus, maius vero obtegatur, et examinetur, vtrum imago erecta limbo ſuo filum tangens ſimiliter parallaxi careat, nec ne; ſin minus, interuallum lentium A B et G H eovsque mutetur, donec illa euaneſcat. In hoc ſitu ſingulae lentes probe firmandae ſunt, ita tamen, vt axes earum ſimul in vnam lineam coincidant. Methodus, hanc axium coincidentiam obtinendi magis prolixa quam difficilis eſt, et eadem fere encheireſi

reſi abſoluitur, quam clar. *Peſſement* in practica compoſitione teleſcopii gregoriani deſcripſit.

Qui aberrationem radiorum ex figura lentium ſphaerica oriundam proportionibus radiorum conuexitatis lentium inter ſe aliquatenus imminuere ſtudent, lentibus obiectiuis tribuant radios in ratione 1 ad 6 vel 7 vel 8, et magis conuexam faciem obiecto obuertant. Lentis G H radii conuexitatum ſint in ratione 1 ad 2 vel 3, et planior facies imagini β Φ exponatur. Aliqui quidem opticorum arbitrantur, aberrationem figurae ſphaericae debitam reſpectu confuſionis multo maioris e diuerſa radiorum refrangibilitate oriundae plane negligi poſſe. Sed experientia me docuit, aberrationem debitam figurae lentium ſphaericae in ipſis tubis achromaticis, in quibus radii conuexitatis et concauitatis debitam proportionem in lente obiectiua compoſita non habebant, obiecta conſpicua moleſta nebula obfuſcare.

Cum noſtro aeuo methodus innotuerit, quomodo ſola encheireſi in laeuigando et poliendo adhibita ſpeculis et lentibus figura parabolica, hyperbolica et elliptica induci queat, operae pretium foret, vt geometriae ſublimioris periti opticae practicos vberius inſtruerent, quodnam emolumentum in imaginibus obiectorum perfectius depingendis a qualibet ſectione conica lentibus inducta expectandum ſit. Quas enim Carteſius olim eiusmodi lentium qualitates expoſuit, nouo examine indigere videntur, ſiquidem valde dubium eſt, idem de obiecto latiori radiante valere, quod de puncto radiante valet.

ANNO-

ANNOTATIO
IN
PRAECEDENTEM DISSERTATIONEM.

Auctore
I. EVLERO.

Huiusmodi tubus, idem obiectum ſimul tam ſitu erecto quam inuerſo repraeſentans, ſequenti modo facillime conſtrui poſſe videtur:

Eligatur pro lubitu tubus terreſtris, ordinarius, quatuor lentibus pp, qq, rr, ss, inſtructus, cuius ſecunda imago erecta cadat in $g\gamma$, vnde per lentem ocularem ss oculo in O collocato repraeſentetur. Sit huius lentis ocularis ss diſtantia focalis $= s$ et ratio multiplicationis, qua iſte tubus obiecta auget, ſit vt $m : 1$. Vt iam tubus aſtronomicus per eandem lentem ocularem obiecta ſub aequali multiplicatione oſtendat, eius lentis obiectiuae diſtantia focalis debet eſſe $= ms$. Haec autem lens obiectiua in medio perforata ſit, tanto foramine, per quod prior tubus transmitti poſſit. Talis autem lens in medio foramen gerens haud difficulter parari poteſt. Tum igitur prior tubus terreſtris immittatur per foramen huius lentis obiecti- Tab. IV. Fig. 6.

uae, quae ſit Π Π. At vero interioris tubi portio inter binas poſtremas lentes *r r* et *s s* contenta penitus auferatur, vt etiam lens obiectiua Π Π imaginem ſuam inuerſam in ipſo loco *g* η proiicere queat. Hoc igitur modo vtraque imago per lentem ocularem *s s* ab oculo in O conſtituto conſpicietur, eodem ſcilicet modo, ac ſi per vtrumque tubum ſeorſim ſpectaretur.

PHY-

PHYSICA.

DE

VESICVLAE FELLEAE HVMANAE DVCTVSQVE HVMANI CYSTICI ET CHOLEDOCHI SVPERFICIEBVS INTERNIS.

Auctore

C. F. WOLFF.

Si quis partes corporis humani inueſtigare occipiat eo conſilio, vt aliquid noui in iis detegat; huic neque minimas, mea quidem ſententia, neque quae maxime intra alias abſconditae ſint, particulas adeundum erit. Nullus eſt ductus in corpore humano, nulla forte arteria vel vena, nulla ſane cauitas vaſis alicuius aut viſceris tunicati, nullusque meatus, qui non ab aliis iam; immo etiam a multis, eodem ipſiſſimo conſilio ſit ſaepius apertus et minutiſſime perluſtratus. Neque in minutioribus ſubtilioribusque particulis auri cumulos inuenire ſperato, quae ipſae quippe eae imprimis ſunt, quas omnium maxime ab aliis iam ſaepius ſaepiusque microſcopiorum adminiculo examinatas eſſe putes. Si quid forte ſperandum ſupereſt, in iis potius operam locandam eſſe partibus arbitror, quae quotidie

tidie quaſi anatomicorum ſub oculis verſantur, quas manubus quotidie tractant, quae omnium primo, inciſo vel aperto cadauere, etiam nolenti occurrunt, quas remouere celeriter, occulta vt inueſtigent, magisque latentia, ſummo cum ſtudio conantur. Ad eas enim, vtpote a Galeno iam vsque deſcriptas, delineatasque et examinatas, animum minus aduertunt.

Quicquid autem ſit eorum, quae dixi, non plane inutilis tamen haec mea interioris ſtructurae veſiculae felleae, ductuumque biliariorum inueſtigatio fuit. Quam haud animo inueniendi tamen, ſed ſolo eo conſilio, ſusceperam, vt iconem mihi conficerem bonam, quam poſſem cum leonina et cum tigridis ſtructura comparare, et ſingularia, quae in his poſterioribus eſſent, tanto facilius percipere atque obſeruare.

Plicas continuo reperi egregias in collo veſciculae, quae tamen non in ſingulis corporibus reperiuntur, et ob ipſam hanc cauſam procul dubio non ſatis deſcriptae iconibusue demonſtratae eſſe videntur. Cyſticus ductus plenus deinde eſt trabeculis et cellulis ſingulari ſtructura, cuius rei anatomici, neſcio quam ob cauſam, nullam, quantum ſcio, mentionem faciunt. Et ductus hepaticus, imprimis choledochus, conſperſus eſt intus lacunis copioſiſſimis muciferis, de quibus haec pauca verba apud Hallerum reperio: eſſe, qui ſibi perſuadeant, ſe lacunas (in his ductibus) vidiſſe. Operae pretium igitur eſſe, duxi, de rebus tam dubiis, vel etiam ignotis, vt iconem, quam mihi proprium priuatumque in vſum comparaueram, vna cum illis, quae tigridis ſtructuram repraeſentant, publici iuris faciam, deſcriptionemque aliquam ſuccinctam illi adiungam.

Veſi-

Veſiculâ igitur humanâ, ſecundum longitudinem inciſa et aperta, bileque elota, pulchra eius ſuperficies interna, villoſa plerumque dicta, apparet, quam tunica efficit tenera, mollis et quaſi pulpoſa, cuiusmodi omnes fere illae ſiue internae ſiue externae eſſe ſolent, quae teneram ſericeam illam, ſiue villoſam, naturam oſtendunt. In ea praeter villos, (*) qui apparere videntur, dum veſicula ſub aqua leniter motatur, rugulae imprimis, quibus vniuerſa interna ſuperficies ornata eſt, et pori quidam muciferi notabiles ſunt.

Veluti in tigridis et in leonis veſicula, laxior membrana eſt interna et amplior exterioribus, iisque ea ratione applicata, vt rugulas vndique efficiat, multo quidem quam in leone et tigride leuiores minoresque et ſubtiliores, at ſimili fere modo tamen in reticulatam ſtructuram diſpoſitas. Tam tenues ſunt rugulae, vt filum mediocre craſſitie in plurimis ſedibus vix excedant, tamque ſubtile reticulum, quod faciunt, vt areolae rugis inclutae, lenticulam rarius, ſaepe vix granulum papauerinum, recipiant. Imprimis in parte collo propiori, tum etiam in ipſo fundo, et paſſim in ampliori veſiculae parte, tenerior eiusmodi, eoque pulchrior, reticulata ſtructura obſeruatur. Obſcurior alibi eſt, idque eo magis quo maiores areolae ſunt, quas rugae includunt. Nusquam tamen vel plane reticularis ſabrica euaneſcit, vel in aliam rugarum diſpoſitio-

(*) Veros villos, ſiue vaſa ſolitaria nuda exſerta in his tunicis non exiſtere, Lieberkühnii praeparata docuerunt. Viſum eſt tamen, receptum et inueteratum nomen retinere eo magis, cum oculis inermibus viſae hae tunicae omnino ſericeam eius modi faciem prae ſe ferant.

ſitionem abit, quemadmodum hoc in tigridis et in leonis veſicula contingit, vbi vndulatae paſſim rugae, paſſim circulares, vel alia ratione diſpoſitae, iuxta reticulatas inveniuntur.

Veris rugulis autem membranae internae laxioris totum hoc in humana cyſtide reticulum deberi, nec fibris illud propriis reticulatim ductis effici, vt ſententia eſſe videtur nonnullorum anatomicorum, magnae in leonina et in tigridis veſicula rugae facile demonſtrant, quae aeque ac plicae, dum membrana interna ab exterioribus membranis ſeparatur, eo ipſo deſtruuntur et euaneſcunt.

In iis reticuli areolis, haud tamen in ſingulis, ſed in paucis modo earum, pori muciferi inueniuntur, ſparſim per omnem ſuperficiem internam, ſed adeo rari, diſtributi, vt in vniuerſa veſiculae cauitate vix vltra viginti numerauerim. Minimi ſunt, ſetamque porcinam vix admittunt, et proprio adeo nomine meritoque pori vocantur. Interdum totam areolam ſuam occupant; ſaepius minorem eius tantummodo partem. Ab areolis ſimplicibus ipſis autem profunditate ſua facillime diſtinguuntur.

Mucum in his ſecerni, ſeu viſcidum aliquem liquorem, qui aptus ſit ad leniendum parietem veſiculae, et quo munere proinde vero folliculorum muciferorum hi pori fungantur, dubitari non poteſt, cum halitus arterioſus ipſe vel ſerum arterioſum exhalatum in caueis eiusmodi, quamuis paruis, collectum, ipſa mora neceſſario lentorem contrahat, quo ad defendendum parietem contra acredinem aptus euadit. Quare de omnibus etiam

in

in vniuerſum huius generis poris vel foraminulis caecis, maioribus minoribusue, quae in cauitatibus viſcerum vel meatuum et ductuum inueniuntur, affirmari poteſt, eſſe in iis hunc finem naturae, vt ſuperficies internae viſcerum aut meatuum iſtorum lubricentur et contra acorem defendantur ope liquidi alicuius ſpiſſiuſculi, quod neceſſario in his criptis aut poris generatur.

Quamuis plicae in veſicula fellea humana omnino notatae ſint ab Auctoribus; multa tamen incerta, dubioſa, imo et falſa, in deſcriptionibus eorum continentur. *Winslovus* (*) tunicam internam veſiculae *magnum numerum repraeſentare* aſſerit *plicarum reticularium.* Neque in humana vero vnquam, neque in ipſa leonis aut tigridis veſicula, plicae reticulares exſtiterunt, neque magnus numerus plicarum eſt, quo humana gauderet. Quae rugulae autem reticulares vniuerſam omnino ſuperficiem internam replent, quas Vir. Celeberrimus confudiſſe cum plicis videtur, hae adeo vsque a plicis differunt, vt qui vtrasque non diſtinguat, eum vix vnquam credas vidiſſe veſiculae exemplar, in quo plicae rite conformatae fuerint. Idem ſummus anatomicus paulo poſt (**) addit, dari plicas imprimis verſus collum veſiculae, vbi *longitudinales fierent.* Sed nusquam longitudinales neque in collo neque in corpore veſiculae, neque etiam in ductu cyſtico, reperiuntur. Deinde idem Auctor in ſequentibus (***) plicas omnino

(*) Expoſ. Anat. Tom. III. n. 295.

(**) Loc. cit.

(***) Ib. n. 299.

nino a rugis diſtinguit, ponit autem rugas, vbi nullae dantur, et cui parti plicas attribuit, eam tamen eiusdem ſtructurae eſſe affirmat cum reliqua veſicula: *Collum veſiculae* inquit *eiusdem fere ſtructurae eſt quam reliqua pars veſiculae. Inſtructum eſt intus pluribus rugis reticularibus et plicis quibusdam.* Neque autem rugae in collo dantur nec plicae in reliqua veſiculae parte. *Hallerus* in primis lin. Phyſiol. §. 688. tum collo veſiculae tum ductui etiam cyſtico *rugas* adſcribit *molles quae a flexionibus colli et ductus intus producerentur in ſiccatoque folliculo aliquam valuulae ſpiralis ſpeciem referrent*; quae idea autem remotiſſima a vero et omnino falſa eſt, cum plicae colli minime a flexionibus eius pendeant, ſed ſola interna tunica duplicata efficiantur, conſtantesque maneant, etiamſi veſicula et ductus ab omni vinculo externo ſoluantur et extendantur. In Elementis ſuis (*) Vir olim perilluſtris ita ſcripſit: *Verſus ceruicem plicae longitudinem magis ſequuntur.* Neque quidquam praeter haec pauca verba de plicis veſiculae humanae in magno hoc opere reperio. Nunquam autem longitudinales plicas in humana veſicula vidi, nec credo, eas vnquam exſtitiſſe; cum Vir perill. haec verba allegata a *Winslowo* potius, cuius is ipſe locus, quem ſupra memoraui, in notis ad ea verba citatur, et a *Duvernejo*, mutuaſſe, quam propria experientia edoctus ſcripſiſſe videtur.

Sunt igitur verae plicae, diſtinctae a rugis, diſtinctaeque et independentes a flexionibus, quas collum veſiculae et ductus cyſticus progrediendo efficiunt. Hae ſolum

(*) Tom. VI. p. 527.

ſolum collum, ſeu partem, ductui cylindrico proximam, anguſtiorem veſiculae ad ſeptem quaſi linearum longitudinem vsque a principio ductus, occupant; nec quidquam iis ſimile in reliqua ampliori veſiculae parte obſeruatur. Transuerſim collocatae exiſtunt ad ductum veſiculae, et circulos quaſi integros in integra veſicula repraeſentare videntur; quae ſimplices ſcilicet plurimam partem et ſeparatae vna ab altera nihil aut compoſitionis aut reticulatae ſtructurae in ſe admittunt. In eo, cuius iconem trado, exemplare quinque eiusmodi plicas numeraui, nec facile eas hunc numerum in corpore humano excedere puto. Prima, quae ductui cyſtico proxima, minima eſt et ſimilis fere trabeculis illis transuerſalibus, quibus ductus ipſe occupatur; reliquae inde, prout cauitas colli veſiculae ſenſim amplior fit, latiores et maiores euadunt. Secunda et tertia in inciſa et aperta veſicula ſemilunares figura plicas referunt; circulares autem in integra eſſe videntur. Illa minor, haec maior eſt, vtraque ſimplex autem et integerrima. Idem de quarta dicendum, quae figura binis prioribus ſimilis, magnitudine tertiae aequalis eſt. Quintam autem, ſi tanquam vnam conſideraueris, compoſitam in hoc exemplare, et aliquo modo reticulatam, appellare poſſes. Conſtat enim ex quatuor minoribus plicis, irregulariter connexis, et cum praecedenti quarta quoque in parte ſiniſteriori cohaerentibus. Tota natura autem diuerſa eſt a rugis reticulatis, ampliorem veſiculae partem occupantibus, quas vt magnitudine et eminentia multum ſuperat, ita contra regularitate iis longe eſt poſtponenda. (*)

 Hae

(*) Loco harum plicarum in alio corpore non niſi vnicam reperi magnam

Hae plicae, vt monui, omnes ſola interna veſiculae tunica duplicata efficiuntur, laminis, quibus conſtant, duplicibus teneriori celluloſa coniunctis. Neque euaneſcunt, etiamſi ab omni celluloſa externa veſicula, imo ab inuolucro externo, quod ab hepate habet, liberatur. Eo mamagis ergo miratus ſum, cum in Elementis ſupra laudatis (Tom. VI. p. 527.) ſcriptum eſſe viderem, verbis quidem *Buffonianis*: etiam in leoninae et in tigridis veſiculis vti in felis, lyncis, pantherae et catopardi, plicas ingentes deſtructa celluloſa tela aboleri; quae ſane in leonis et tigridis veſiculis, quas examinaui, niſi veſicula ipſa deſtructa, ſolutisque a ſe inuicem tunicis ſingulis, multo etiam minus quam in humana, abolentur.

Plicae

---

gnam et latam plicam, ea ratione ad oſtium ductus cyſtici poſitam, vt vi quacunque, a parte veſiculae applicata, hoc oſtium perfecte clauderet. Compreſſeram digitis veſiculam eam, cum integra adhuc omnibus vinculis ſuis hepati adnata exiſteret. Intumuit capitulum, ſeu pars colli extrema, ex qua recuruata ductus oritur. Quo magis premebam, eo magis capitulum extendebatur; in ductu ipſo ne vmbra quidem intumeſcentiae aut motus alicuius percipi poterat. Repetii experimentum idem, cum tunica ſua externa, quam a peritonaeo habet, veſicula exuta et ab hepate ſoluta eſſet. Euentus omnino idem fuit. Videntur ſequentia mihi inde deduci poſſe: 1) Portionem nonniſi valde exiguam bilis ſuis temporibus ex veſicula paullatim ſubrepere et mixtam cum bile hepatica in duodenum venire. 2) Hunc motum bilis minime preſſione veſiculae, a pleno ventriculo facta, ſed vi alia, excitari, quin ipſum id potius, ne quauis fieri poſſit aut concuſſione aut compreſſione abdominis, tantis a natura obſtaculis, plicis, flexionibus, trabeculis, et cellulis, eſſe proſpectum. Poros muciferos, ſuperius deſcriptos, in hac veſicula non reperi; lacunae vero choledochi ductus, quae deſcribentur, copioſae fuerunt.

Plicae caeterum, vti a rugis, ita et a valuulis, probe ſunt diſtinguendae; quamuis fabrica his et figura ſint ſaepe ſimillimae. *Plica* ſimplex tunicae internae vaſis, aut receptaculi alicuius, duplicatura eſt, quae intra cauitatem notabiliter eminet, et margine tenui, plerumque exciſo, terminatur; quae fluidum remorari quidem in ſuo progreſſu, at iter dirigere fluidi huius aut determinare nullo modo poteſt. *Ruga* minus eminet, nec margine acuto terminatur, ſed dorſo potius, ſeu facie conuexa, cylindrica, in cauitatem ſpectat. *Valuula* duplicatura ſimilis plicarum eſt, cuiuscunque figurae, et ita diſpoſita, parietique adhaerens vaſis, in quo continetur, vt fluido, ex altera vaſis parte veniente, ad parietem applicetur, plenamque ſic tranſituro fluido viam concedat; veniente autem ex parte oppoſita extendatur, et viam occludat; eaque ratione fluidi iter dirigat. Hoc ſolo mechaniſmo et inde pendente vſu valuula ſe a plica diſtinguit.

Ab his veſiculae plicis, quae collum modo tenent, et a rugis reticularibus, quae reliquam eius partem ampliorem occupant, ea luculenter differt ſtructura, quae in cyſtici ductus cauitate obſeruatur. Sunt fila craſſa et breuia, ſiue trabeculae, vt ſolent huius indolis particulae vocari, transuerſae, irregulares figura, triquetrae, quadrangulae vel teretes, quibus in eo ſane, cuius iconem trado, exemplo totus breuis ductus cyſticus quaſi repletus eſſe videtur. Sunt latiores aliae craſſioresque, aliae tenuiores; nonnullae ſimplices ſunt, pleraeque autem compoſitae et quaſi ramificatae. Extremis plerumque latioribus parietibus ductus adhaerent; in media ſui parte tenuiores exiſtunt. Pleraeque transuerſae ſunt et ab vno ductus pariete recta in op-

poſitum tranſeunt; vna tamen vel duae poſſunt longitudinales cenſeri. Fabrica harum trabecularum celluloſa tela eſt, tenui interna membrana ductus inueſtita.

Vti ad nouem vel decem vsque harum trabecularum transuerſalium in toto cyſtico ductu, cuius longitudo pollicem haud multo ſuperat, numerantur; in totidem quoque folliculos ſeu cellulas, cauitas ductus his trabibus quaſi diſtinguitur. Hae, vt ſeptula ipſa, variae figurae ſunt et magnitudinis, profundae tamen omnes et anfractuoſae. Interſtitiis variis aut osculis foraminibusque, ſaepe exiguis, inter ſe comunicant, et bilis lento gradu in iis promoueri, nec raro retineri, aut diutius comorari, videtur, vt in folliculis veſiculae tigridis et leonis, quibuscum hae ductus cyſtici cellulae aliquam analogiam habere videntur. In fundis harum cellularum pori muciferi quoque paſſim obſeruantur. Ex ipſa autem tam trabium quam cellularum, vel in primo exemplo, conformatione facile patet, fieri non poſſe, quin figura, magnitudine et numero in variis corporibus variae quoque inueniantur. (*)

Haud magis haec cyſtici ductus ſtructura interna, quam illa veſiculae felleae, recte obſeruata et intellecta eſſe vide-

(*) In proximo, in quo hanc ſtructuram inquiſiui, corpore, vltra viginti harum trabecularum reperi. quibus tota ductus cauitas repleta erat. Tenuiores erant trabeculae ſed figura ſitu fabrica et natura eadem. Transuerſae ab vno ductus pariete ad alterum extendebantur, totumque ductum quaſi cauernoſum intus efficiebant; vt facile pateret, non niſi lentiſſimo gradu et reptando, ſenſim bilem ex veſicula ad ductum choledochum venire poſſe. Cauendum autem eſt, ne ductus longitudinaliter inciſus ilico nimis extendatur et trabeculae ea ratione rumpantur.

videtur. Quam fabricam eius *in vniuerſum eandem eſſe* ſcribit beatus *Hallerus* (*) quam *veſiculae*, eam manifeſto quidem de tunicis huius ductus, non de interna ſuperficie, Vir ſummus intellexit. Addit enim, membranas eum habere easdem cum aliqua non manifeſtiſſima irritabilitate. Verum in proxime ſequentibus nullum dubium eſt, quin ipſam cauitatis et ſuperficiei internae naturam indigitauerit. Tumque rugas ductui attribuit intus, quae a vinculis externis, ductum varie flexum retinentibus, in eius cauitate producerentur. *Qua vinculis*, inquit, *cellulofis extus in ſulcos colligitur, ibi intus rugae tunicae villoſae et nerueae eminent, quae poſſint aliquam ſpiralis fabricae imaginem referre, valuulaeque nomen ferre.* Notaui in ſuperioribus, non rugas eſſe, ſed fila craſſa transuerſa, ſiue trabeculas, ex altero pariete recta in alterum tranſeuntes, parietibusque firmiter affixas. Addit deinde Vir Perilluſtris haec verba de rugis illis ductus cyſtici: *vt tamen molles alternae transuerſae aut obliquae plicae ſingulares deorſum, ſiue ad inteſtinum, concauae ſint, neque tamen iter bilis valde morentur, etſi videntur morari*: Nullum dubium autem eſt, quin, quam deſcripſi, folliculoſa ductus ſtructura valdopere bilis iter moretur. Caeterum plicas cum rugis in his deſcriptionibus confundi facile patet, imo confuſas eſſe cum valuulis, ſequentia verba docent, quibus, de iisdem ſemper rugis ductus cyſtici loquendo, ſic Auctor pergit: *Prima valuula maxima eſt, et ſaepe pene totum oſtium veſiculae claudit, reliquae ex ordine minores.*

Non

(*) Element. Phyſ. Tom. VI. p. 530.

Non immorabor extricandis inutiliter litibus priorum anatomicorum, quorum alii valuulas veſiculae aut ductui attribuerunt cyſtico, quae nullae neque in ductu neque in ipſa leonis aut tigridis, nedum in humana, veſicula dantur; alii perperam, valuulas negando, omnem propterea peculiarem ſtructuram internam veſiculae et ductui negandam eſſe arbitrati ſunt.

Nec certius tamen conſtitit de lacunis ductuum hepatici et choledochi. *Sequitur tunc neruea tunica*, inquit Hallerus (*), *cum villoſa ſuperinducta, ex inteſtino continuata vtraque, haec eleganter reticulata, iugis teneris, vario ductu intricatis, et interceptis ſcrobibus foſſulisque, in quibus ſunt, qui cryptas ſe vidiſſe perſuadeantur.* Atque haec ſunt, quae de his cryptis ſiue lacunis in ductibus hepatico et choledocho Vir olim Perilluſtris monuit, vnde patet, eum ipſum de exiſtentia harum lacunarum perſuaſum non fuiſſe. Se vidiſſe aiunt imprimis Duverney et Malpighi. Negat contra eas Bertrandi.

Nullum ſane dubium eſt, quin tunica interna choledochi ductus originem trahat a villoſa inteſtinorum, vel tamen continua ab ea ducatur per totum biliferorum meatuum ſyſtema. Non ſequitur perinde, vt eandem propterea naturam retineat. Velut aliter cutis comparata eſt corporis externa, aliter villoſa inteſtinorum, quae tamen manifeſto ex illa continuatur, rurſusque in eam abit; velut adnata oculorum, corneae addita, vehementer a cute eadem differt, cui illa ſimiliter continua eſt; ſic aeque tunica

(*) Elem. Phyſiol. Tom. VI. p. 507.

nica interna choledochi et ductus hepatici diuerſa eſt a villoſa inteſtinorum. Nullum indicium villorum in meis quidem exemplaribus reperi. Tunica vbique laeuis eſt in homine aeque ac in leone et in tigride. Neque reticulatam ſtructuram in his ductibus vidi, niſi in primo choledochi ab inteſtino initio, et in ea eius parte, quae inter tunicas inteſtini continetur.

In ea reticulum conſpicitur, imprimis in ipſo ductus in inteſtinum introitu, quod teneritate et elegantia ſtructurae multum etiam illud ſuperat, quo veſicula intus ornatur. Inde deorſum ad oſtium vsque, quo ductus pancreaticus in choledochum inſeritur, et porro vsque ad aperturam huius in inteſtinum, fabrica reticularis paulo obſcurior eſt. Super eam ſedem autem, qua ſe ſub inteſtini membranas ductus recipit, vsque ad ortum eius ex hepatico et cyſtico ductu, ſimplex et laeuis ſuperficies eſt, ſuperius quidem, et propius ductui cyſtico, ſtriis longitudinalibus, leuiter impreſſis notata, inferius autem his aeque et rugis carens reticularibus.

Haec laeuis ſuperficies ergo tota lacunis conſperſa eſt muciferis. Copioſiſſimae iſtae et quaſi congregatae exiſtunt in media ductus parte, quae, ſtriis et rugis vacua, laeuis plane et aequalis eſt, inde deorſum ad duodenum vsque, ſed paulo rariores, occurrunt; rariſſimae ſuperius in parte ſtriata inueniuntur.

Differunt hae lacunae aliquantum a poris illis, quibus veſicula inſtructa eſt. Paruae equidem et iſtae ſunt, ſed inſinuant ſeſe oblique, quin fere parallelae ad ſuper-

 ficiem,

ficiem, ſub tenuem ductus tunicam internam, quae cauitatem lacunulae tegit, et tenero margine exciſo oſtium eius format. Saepeque ex oſtio ſulcus quaſi continuatur, in quo liquidum expreſſum defluere videtur. Atque in hoc ſitu et conformatione ſimiliores hae lacunulae illis ſunt, quae in viis vrinariis et in vagina muliebri inueniuntur. Pori veſiculae contra recta in ſuperficiem membranae internae deſcendunt et tanquam foraminula caeca profunda apparent.

Ductus hepaticus aliquam reticuli ſpeciem, ſed obſoleti, habet. Tenuiſſimae ſunt rugulae, quae illud efficiunt, areolaeque incluſae vix ſeminis papauerini granulum admittunt. Illae quidem ad latitudinem meatus ductae ſunt, hae figuram habent transuerſim oblongam. Imprimis tamen ad finem ductus inferiorem modo, vbi cum cyſtico ille coniungitur, haec ſubtilior, quaſi reticulata, ſtructura obſeruatur. Superius ſuperficies laeuis et aequalis eſt, vt in choledocho.

Lacunas quoque, nec raras, ductus hepaticus habet, imprimis in parte ſua ſuperiori, vbi laeuis et aequalis ſuperficies eſt. Hae ſatis ſimiles ſunt choledochi lacunis. Quae autem in inferiori ſubreticulata parte rariores occurrunt, ad poros potius, quales veſicula habet, quam ad illas lacunas referendae eſſe videntur. Atque hoc eo magis mihi notabile viſum eſt, cum etiam in ima choledochi parte, quae intra duodeni membranas continetur, quaeque ſimiliter reticulata eſt, mucifera organula reperiantur, quae pariter et rariora occurrunt et cum poris veſiculae ſtructura et ſitu conueniunt.

Haec

Haec ſunt, quae in internis veſiculae et ductuum biliferorum ſuperficiebus non ſatis notata et deſcripta fuiſſe credidi. Mirum autem videri oportet, vt tanta copia cryptarum muciferarum munitos eſſe videmus hepaticum ductum et choledochum, quos tamen bilis modo tranſit; tam ſparſos contra raroſque inueniri poros in ipſa veſicula fellea, in qua bilis colligitur, diutiusque moratur, et maiorem acredinem contrahit. Sed ratio ſapientis naturae haud plane latet. In vniuerſum minus ſenſibiles minusque irritabiles eſſe videntur tunicae villoſae, quam illae quae laeues aequales et tenſae ſunt, ſiquidem pariter vtraeque ex cute continuantur. Videnturque ipſi villi, ſeu particulae eminentes, quas nerui non ingrediuntur, aliquod munimentorum contra acredinem genus ſuppeditare. Quodſi nunc ipſe primarius naturae finis in fellea veſicula fuerit, vt bilis morando maiorem acredinem contrahat; ſi inutiliter illa et praeter neceſſitatem muco onerata fuiſſet leniente, ſibi ipſi naturam ſuoque fini contrariam fuiſſe facile vides. Villis igitur potius abſorbentibus ipſis et ad acredinem in bile procreandam et ad defendendam veſiculam contra eam acredinem in cyſtide, lacunis in ductibus vtebatur, quos bilem celerius tranſire oportebat.

Sed haec ad aliam nos porro ducunt ſpeculationem. Saepius, reticulata intus et villoſa membrana inueſtitos eſſe, ſcriptum eſt, hos ductus, choledochum et hepaticum; et pauci contra Auctores de lacunis loquuntur. An villis ergo et rugis in aliis natura vtitur corporibus, in aliis potius muco et lacunis? Conſentire videntur ea quae de variis ſedibus ductus choledochi et hepatici notaui, quae poris erant inſtructae rarioribus, vbicunque re-

ticulata ſedes, copioſis contra lacunis, vbi lacunis erat. Si vera haec ſunt; ſi ſaepius ſimilia occurrunt exempla; duplices corporis humani ſtructurae dantur, et duplicibus ergo nobis ad eam repraeſentandam exemplaribus iconibusque opus erit.

Tab. VI.

Veſicula ſellea humana, aperta, cum ductibus cyſtico, hepatico et choledocho, ſimiliter apertis.

A. B. C. Veſicula fellea. *A.* fundus. *A. B.* Corpus veſiculae *B. C.* Collum veſiculae. *C.* Capitulum, quod, compreſſa veſicula integra, bile turget et intumeſcit.

D. Ductus cyſticus, inciſus, et, quantum ſine laceratione fieri poteſt, apertus.

E. Ductus hepaticus apertus.

F. G. H. I. Rami eius, ex foſſa transuerſali hepatis exciſi.

F. Ramus transuerſalis dexterior, ex lobo hepatis dextro adueniens, (veſicula ſcilicet, quamuis ex carne hepatis euoluta, tamen in inferiori ſua ſuperficie, auerſa ab hepate, inciſa eſt.)

G. G. Duo rami transuerſales ſiniſtri, ex lobo hepatis ſiniſtro orti.

H. Ramus anterior, ab anteriori parte hepatis adductus.

I. Ramus poſterior apertus.

K. Ductus choledochus apertus.

L. Duodeni aperti pars, obiter expreſſa.

M. Du-

M. Ductus choledochus, vbi inter membranas inteſtini ſe inſinuat, anguſtior.

N. Eius pars inter membranas inteſtini contenta, ad internam huius ſuperficiem aperta.

O. Communis ductuum choledochi et pancreatici breviſſimus truncus, quo ſe in inteſtinum aperiunt, ſimiliter inciſus.

a. a. a. a. Rugae accidentales, vt fortuito in collabeſcente veſicula producuntur.

b. b. b. Villoſa, vt in his ſedibus rugatis imprimis ſuperficies interna apparet, dum veſicula ſub fluido aliquo ſubmerſa tenetur. Non ſunt tamen veri villi.

c. c. c. etc. Pori muciferi, qui non in omnibus veſiculis felleis reperiuntur.

d. d. d. Rugae reticulares conſtantes, quibus tota interna ſuperficies veſiculae ornatur. Manifeſtiſſimae, eaque pulchriores, in his ſedibus indicatis ſunt.

e. e. e. Rugae reticulares, vt paſſim occurrunt leuiores obſcurioresque, areolis incluſis maioribus.

f. Rugulae ſimiles areolis minoribus.

g. Rugulae lineares, quae in ſola hac ſede huius veſiculae reperiuntur.

h. i. k. l. m. Plicae colli veſiculae. *h.* Haec prima a ductu cyſtico, inter caeteras minima, poſſetque aliquomodo ad trabeculas ductus cyſtici referri. *i* Secunda, maior manifeſtiorque plica. *k.* Tertia et praecedente maior, omniumque latiſſima. *l.* Quarta.

ta. *m.* Quinta, quae ex pluribus minoribus compoſita eſt.

n. o. p. q. r. s. t. v. Trabeculae transuerſae ductus cyſtici. *n.* Prima latior in extremitatibus ſuis diuiſa, quo bilis eam penetrare poteſt. *o.* Secunda anguſtior. *p.* Tertia ſingularis figurae et fere obliqua. *q.* Quarta transuerſa perforata. *r.* Quinta. *s.* Sexta. *t.* Septima. *v.* Octaua.

w. w. w. Cellulae inter trabeculas, quas bilis quaerit rependo et tranſeundo; vti et inter trabeculas et parietes ductus, anteriorem et poſteriorem, penetrare poteſt.

x. Pori muciferi in fundis cellularum.

y. Orificium rami anterioris (*H.*) ductus hepatici.

z. Orificium commune ramorum (*G. G.* et *F.*)

1. Lacunae muciferae ſparſae in ductu hepatico.

2. Lacunae ſimiles in hac ſede copioſiores.

3. Foraminula minima, potius poris veſiculae ſimilia.

4. Sedes in ductu choledocho lacunis vacua, at ſtriis longitudinalibus ornata.

5. Sedes in eadem lacunis confertiſſima. Hac manifeſto differunt lacunae a poris viſiculae, quod ſurſum margine acuto exciſo terminantur, deorſum ſaepius quaſi in ſulcum ſe effundunt, deinde quod maiores ſunt.

6. Lacunae in hac ſede rariores.

7. Ru-

7. Rugulae reticulares in hac choledochi ductus parte, qua membranas inteſtini ſubit, quaeque poris et lacunis caret.

8. Rugae reticulares obſoletae in tota hac parte, qua inter tunicas inteſtini ductus choledochus continetur.

9. Orificium ductus choledochi diſſectum, quo iſte in eam partem ductus aperitur, quae quaſi truncus communis eſt choledochi et pancreatici ductus.

10. Orificium ductus pancreatici.

11. Superficies interna trunci communis, obſolete reticulata.

ANA-

ANATOME MVSCVLI SVBCVTANEI IN ERINACEO EVROPAEO LINN.

Auctore

BASILIO ZOUIEW.

Quo magis miramur ſingularem in Erinaceo naturam in globum ſe conuoluendi, eo magis videtur res, in qua facultas haec reſidet, attentionem noſtram mereri; attamen multi viri eruditi, qui animal hocce anatomice perquiſiuerunt, vel prorſus nullam, vel valde breuem Myologiae eius faciunt mentionem: inter recentiſſimos Comes de *Buffon* hiſtoriam ſuam de Erinaceo non alio niſi hoc ſingulari animalis inſtinctu ornauit, de quo tamen in Anatomia ne verbulum quidem dixit ſocius eius *Daubentonus.* Hinc non propter exiguum huncce defectum tantum quantum curioſae admirationi ſatisfacere volens muſculum ſubcutaneum deſcribere ſtatui; qui quum non ſoli huic ferae, ſed pluribus mammalium proprius eſt, hinc deſcriptio mea erit ſaltem exemplo faciendae in caeteris quoque obſeruationis.

Dicitur

Dicitur ſubcutaneus a ſitu, quod proxime ſub cute reperiatur, quamuis inter illum et corium adhucdum tenue ſtratum pinguedinis inueniri ſolet, tamen nil impedit, quin fibrae tenuiſſimis ſuis apicibus directe, praeſertim in dorſo, aut ope celluloſae, vbique cum interna cutis facie vniantur. Sublato corio ſpinoſo, abſumptaque ſuper carnes iacente adipe apparet muſculus a parte poſteriore rotundus, quaſi ſcutum repraeſentans, totum dorſum a nucha per brachia, coxas, ad caudae baſin tegens, in medio tenuis, fere tranſparens, fibris longitudinalibus parallelis, transuerſalibusque exiguis; in circumferentia vero craſſus, laxus, ſuper latera effluens, fibris circularibus, continuis, contiguisque ad latera cum fibris rectis muſculi ſubcutanei ventralis.

Ex fibris ſub margine craſſo deliteſcentibus emittuntur faſciculi lataeque ſeries fibrarum ceu appendices ad diuerſas corporis partes tum pro ſui infixione, tum pro communicatione cum reliquo muſculo ſubcutaneo partem pronam inueſtiente. Illas, tametſi poſſent pro muſculis ſpecialibus reſpici, a punctis fixis in oſſibus ortis inque dorſalem ſcutiformem inſertis, habui tamen pro partibus eiusdem, quoniam in loco inſertionis nullum ſignum diſcontinuitatis fibrarum ad partes infra memorandas apparuit. Prima itaque fibrarum ſeries muſculi ſcutiformis ab interno eius margine ceruicem integente paululum lateraliter exorta dirigitur antrorſum per frontem ac latera capitis relicto in vertice nudo interſtitio, inſeriturque vno faſciculo in oſſa naſalia, reliquis vero fibris vel in muſculum orbicularem oculi, vel ſub orbita tranſeuntibus in conſtrictorem labiorum; inferiora autem verſus ex eodem loco per latera colli emittuntur

tuntur fibrae latiſſima ſerie circa humerum ſe flectentes ad pectus, vbi totam mediam ſterni longitudinem occupant ſibi pro inſertione; ſed ex ipſo ſterno ſurgunt quoque aliae fibrae, quae formantes tunicam collum anterius plenarie obtegentem tendunt tum oblique ad latera faciei poſtea cum fibris ſerici ceruicalis ſe coniungentes, tum recta ad mentum totamque faciem capitis inferiorem ſe inſerentes cum reliquis vel in conſtrictorem labiorum, vel in marginem maxillae inferioris.

In lateribus relinquitur primo amplum foramen pro pedibus anterioribus, quorum ſub axilla in parua ab illa diſtantia fibrae ſubmarginales muſculi ſcutiformis coniunguntur cum fibris rectis muſculi ſubcutanei ventralis, ita vt vnum muſculum efficiant atque ſic deſcendant ad femora vsque, vbi iterum ſeparantur, dorſalesque concomitantur circularem ſuum marginem ad caudae baſin, circa quam illae rurſum ſecedunt vno faſciculo ſat lato deorſum ſe circa clunes inflectentes, confunduntur que ad ſcrotum cum fibris rectis muſculi ſubcutanei ventralis; altero vero anguſtiore adeunt caudam.

Quoad partem autem Erinacei pronam iam vidimus ſupra quomodo muſculus collum tegens ſe habeat, neque amplius reſtat memorandus, quam ventralis et pectorales, qui vltimi quanquam ad rem noſtram non pertinent, tamen quoniam directe poſt detractam pellem ſub aſpectum prodeunt et in eundem locum, in quem fere ventralis vtriusque lateris inſeritur, non poſſunt hic ſine aliqua mentione praetermitti. Naſcuntur enim directe ex eodem loco ſterni, vnde tunica muſcularis partem anteriorem

orem colli inueſtiens oritur, transuerſaliterque principio ſub illa decurrentes, poſtea emergentes inſiguntur in medium oſſis brachii. Ex eodem ipſo loco ab vtroque brachio venit ſeries ſibrarum primum non valde lata, ſed vnitae ſimul circa apophyſin enſiformem diffunduntur per totum ventrem muſculum ſubcutaneum ventralem e fibris rectis conſtituentes, quae in lateribus cum fibris muſculi ſcutiformis dorſalis iunctae, relicto prius pro libero motu pedum anteriorum ſpatio, glandulis axillaribus implendo, faciunt trunci quaſi tunicam communem; quae iterum non prius ſinditur quam ad originem femorum, vbi ſibrae laterales rectae ſecedunt quaedam poſterius modo ſupra deſcripto, aliae anterius deſcendentes fere recta per inguines cum rectis ventralibus parallelae, et incuruantes ſe in ſemicirculum ad baſin ſcroti inſeruntur in fibras ad ſcrotum ab altero latere venientes; exteriores vero harum incuruatarum fibrae poſt inſertionem in ſe faſciculi a dorſali per clunes venientis ſecedunt ibidem integro faſciculo, deſcenduntque ad caudae baſin, in quam inſeruntur.

Ex praemiſſa nunc muſculi deſcriptione, factaque fibrarum muſcularium directionis commemoratione iam fere neminem latebit, quem ille vſum et quo modo in animali praeſtet; appendices nimirum antrorſum in caput retrorſumque in caudam ſe inſerentes, atque laterales contiguitates cum ſubcutaneo ventrali inſeruiunt pro retentione muſculi dorſalis ſcutiformis in ſuo ſitu per dorſum expanſo, vt nempe in conuolutione animalis in globum ille extendatur in omnes partes corpusque totum obtegat; vel cum animal aculeos ſuos erigere dorſumque ſolum conſtringere vellet, ne muſculus dorſalis cum fibris ſuis cir-

Ff 2 culari-

cularibus fluctuet, hae appendices retinent illum in debito ei ſitu. Tunicam ſubcollarem pro ratione originis atque inſertionis ſuae patet inſeruire tum pro capitis ad ſternum adductione, tum pro muſculi dorſalis quoque ad ſternum fixatione. Muſculus ſubcutaneus ventralis praeter quod iuuet pedum anteriorum per pectorales complicationem inflectit integrum corpus adducendo anum ad caput, applicatque ſimul ope ſeiunctorum faſciculorum caudam ad ſcrotum.

Explicatio Tabulae VII.

Fig. 1. Erinaceus a tergo repraeſentatus.

a. Muſculus ſubcutaneus dorſum obtegens.

b. b. Faſciculi ad oſſa naſalia, tenuesque ſeries fibrarum ad M. orbicularem oculi et maxillam inferiorem tendentes, vt melius patet in fig. 2.

c. c. Series fibrarum circa brachium ad pectus tendens.

d. d. Appendices circa clunes ſe flectentes.

e. e. Appendices pro cauda.

Fig. 2.

a. Tunica ſubcollaris.

b. b. Muſculi pectorales.

c. c. Interſtitia fibrarum longitudinalium pro pedibus anterioribus glandulisque ſubaxillaribus.

d. Muſculus ſubcutaneus ventrem inueſtiens.

e. e. Appendices a dorſali in ventralem venientes.

f. f. Appendices a ventrali in caudam ſe inſerentes.

DE-

DESCRIPTIO PISCIS NON DESCRIPTI, QVI PERTINET AD GENVS SCARORVM FORSKALII.

Auctore

B. ZOUIEW.

Scarus graeca vox antiquiſſimis maris mediterranei accolis vſitata deſignabat piſcem ſaxatilem, ſquamoſum eſu delicioſiſſimum ſapidiſſimumque, hodie obſcurus refertur a Linnaeo in ſyſtemate ſuo ad Labros; ſed cum notae eius ſpecificae cum charactere generico *Linnaeano* minus conueniant, et genus ipſum Labri male determinatum inter affines ſuos ſparos, ſciaenas et percas vacillet, hinc varii auctores tentarunt ex hiſce quatuor generibus formare noua accuratius definita; Clariſſimus igitur *Gronovius* et poſt illum Celeberrimus noſter *Pallas* diſtincto huic veterum ſcarorum generi indiderunt nomen Callyodontis; *Kleinius* idem voluit intelligere ſub nomine *Sargi*; ſed Clariſſimus *Forskall* in itinere ſuo orientem verſus inſtituto obſeruans longe plures in natali eorum plaga, quam quot *Gronouio* fuerant noti, Callyodontes maluit potius vetus nomen inſigni ſuae Scarorum collectioni reſtituere et retinere. Ideoque hic noſter piſcis, quem deſcribendum mihi propoſui et e longo iam tempore in

muſaeo noſtro aſſeruatus pertinet etiam ad ſcaros Forſkalii, cui ne deficiat quoque ſpecifica denominatio, ob porrectas eius antrorſum maxillas addo nomen maxilloſi.

Scarus Maxilloſus.

Forma et magnitudo Cyprini Carpionis.

Tab. V. Fig. 1.

	Poll.	Lin.
Longitudo totius - - -	11.	0.
Latitudo maxima ſub pinnis pectoralibus -	3.	5.
—— pone nucham circa exordium pinnae dorſalis	3.	-
—— Apicis roſtri per extrema labia -	-	9.
—— Mediae caudae inter pin. dorſ. definentem et pinnam caudae - -	1.	3.
Craſſities ſub pinnis pectoralibus - -	1.	6.
—— Capitis per oculos - -	1.	3.
—— roſtri ante oculos - -	-	7½.
—— mediae caudae - - -	-	9.
Pars prominens maxillae ſuperioris ab extremo labio ad apicem - -	-	4.
—— —— maxillae inferioris - -	-	3.
Ab apice maxillae ſuperioris ad rictum -	-	8.
A rictu ad nares poſteriores - -	-	8.
A naribus poſticis ad medium pupillae -	-	7.
A med. pupill. ad baſin pin. dorſ. -	2.	
Longitud. pinn. dorſ. per baſin - -	5.	2.
Altitudo eiusdem - - -	-	6.
Diſtantia a media pupilla ad exordium pinnae pectoralis - - -	1.	7.
Longit. eiusdem - - -	2.	2.
Longit. pinn. ventr. - - -	1.	7.

Lon-

		Poll.	Lin.
Longit. pinn. ani	- - - -	2.	1.
Altitud. eiusdem	- - - - -		10.
Longit. laciniae pinnae caudae	- -	2.	1.
Latitud. caudae per baſin	- -	1.	9.

Corpus cathetoplateum, ouato-oblongum, pingue, ſquamoſum; ſquamis magnis, orbiculatis, rigidis, imbricatis, ſtriatis, ciliatis; vittatum, vittis in ſpiritu obſoletis, perque ſolas maculas in medio ſquamarum reſtantes recognoſcendis.

Caput proportionale, cathetoplateum, decliue, ſquamoſum praeter frontem, genas, gulamque alepidotas; roſtro ſubporrecto; maxillis ceu dentibus extra os prominulis, latis, conuexis, per medium fiſſis, margine acuto, ſubcrenulato, inferiore ſubeunte ſuperiorem, cuius ad rictus labiorum vtrinque lateraliter extrorſum prominent apophyſes ſubulatae, acutae, longitudine paulo extra labium.

Labia carnoſa, ad marginem attenuata, ſimplicia, ad rictus duplicata, interiora introrſum papilloſa.

Nares geminae, ſuperae, oculis proximiores, remotiuſculae, anteriore minore ſubrotundo, poſteriore maiore, ſemiorbiculato.

Oculi proportionales, ſuperi, depreſſi, rotundi; membrana nictitante circulari ſemitecti; iridibus aureo-nitentibus, pupilla ſubgloboſa.

Opercula branchialia duplicia, flexilia, ad marginem cute circumdata, arcuato-acuminata, libera, in media ſuperficie ſquamis tecta; membrana branchialis quadriradiata.

Aper-

Apertura branchialis in latere, arcuata, ampla, tecta.

Gula, thorax, abdomen, dorſumque rotunda; lateribus planis, aequalibus.

Linea lateralis duplex; altera dorſo parallela ab aperturae branchialis angulo ſuperiore incipiens cumque pinna dorſi deſinens, altera ab hocce loco in medio latere inchoans, recta ad baſin caudae tendens.

Anus poſt aequilibrium.

Cauda carnoſa.

Pinna Dorſi ſolitaria, longitudinalis, continua, aequalis, coriaceo-radiata, radiis robuſtis numero 19. quorum nouem priores ſimplices, reliqui ramoſi.

Pinnae Pectorales ſub linea longitudinali, proportionales, acuminatae, radiis 14.

Pinnae Ventrales paulo poſt pinnas pectorales, vicinae, minimae, acutiuſculae, radiis robuſtioribus, numero 6; ſquama inter illas lanceolata, a lateribus oblongo-acuminata.

Pinna Ani aequalis, ab ano per duas tertias partes caudae excurrens, radiis firmis 11. quorum duo ſolummodo anteriores ſimplices, reliqui ad apicem in ramos ſoluti.

Pinna Caudae ſubaequalis; laciniis acuminatis, radiis validiſſimis, ad baſin ſquamis ſtipatis.

Habitat in mari rubro, etiam mediterraneo.

ASTRO-

EXEMPLVM ELECTRICITATIS PRAETERNATVRALIS.

Auctore
N. OSERETSKOVSKY.

Quo rariora ſunt phoenomena in corpore humano apparentia, eo diligentius a phyſicis obſeruari atque indagari merentur; per ea enim cognitio corporis humani lucem atque augmentum nanciſcitur. Nihil rarius eſt electricitate praeternaturali, quae in vnico tantummodo aegro nouiſſime eſt obſeruata, cuius et origo et cauſa huc vsque phyſicos latet. Vnicum enim exemplum non ſufficit, vt de re tam momentoſa certi quid ſtatui poſſit. Idcirco Celeberrimus *Gaubius*, qui hiſtoriam illius aegri, in publicis lectionibus, diſcipulis ſuis ſaepe narrare ſolebat, opinionem ſuam hac de re ita proponit: " Vtrum ,, morboſa affectio etiam in homine ignem ciere electri- ,,cum

„ cum poteſt, qui fulgurante ictu ſe ſe manifeſtet, cum „ corpora aliena contactum minantur? Symptomatis inauditi ſuſpicionem nouiſſimum quidem exemplum mouit, „ nec plura tamen deinceps confirmarunt" (*).

Non dubitaret omnino vir eruditiſſimus, id fieri poſſe per morbos, ſi compertum haberet, dari homines, qui etiam in ſtatu ſano, absque vllo morbo manifeſto, praeternaturali eiusmodi electricitati ſunt obnoxii. In vtroque enim ſtatu, tam morboſo quam ſano, phoenomenon hoc ex eodem profluere principio plus quam veriſimile eſt, vel ita ſaltem mihi videtur. Exemplum habeo eiusdem phoenomeni, quod tamen non in aegro, ſed in homine ſano eſt obſeruatum; de cuius veritate eo minus dubitare licet, quod homo ille, quem in exemplum propono, etiam nunc viuit, viuit et eundem ignem in corpore ſuo hactenus alit.

Eſt ille *Michael Puſchkin*, incola vrbis Tobolsk, qui ab anno 1775 in hunc vsque diem per ſe adeo eſt electricus, vt qui ipſum tangunt, ictu admodum ſenſibili exinde afficiantur. Neque opus eſt id experiri in ipſo eius corpore, ſed ſufficit tantummodo digito tangere ſericea eius tibialia, ſtatim ac ea de pedibus ſuis detraxit; parem tunc ictum accipiunt illi, qui experimentum hoc inſtituere tentant.

(*) Gaubii Inſtitution. Pathologiae §. 660.

tant. Primus, qui phoenomenon hoc in illo *Puſchkin* obſeruauit, fuit eius ſeruus, qui cum detrahere parabatur ſericea de pedibus domini ſui tibialia, admotis manibus illico ictum accepit, ſcintillam vidit, et repulſus attonitusque ab incepto deſtitit. Ex eo ipſo tempore cognouit *Puſchkin*, ſibi hoc praeter naturam eſſe, notumque id fecit in tota vrbe in qua habitat, litteras etiam ſcripſit ad illuſtrem Dominum *Meliſſino*, Vniuerſitatis Caeſareae Mosquenſis Curatorem, et, quid cum ipſo agatur, ei retulit. Nunc fere omnes incolae vrbis Tobolsk per experientiam norunt, dari in homine iſto ignem electricum, qui fulgurante ictu ſe manifeſtat, quam primum manus alius hominis vel quaecunque alia pars corporis ipſi admouetur.

Multifaria autem experimenta docuerunt, hominem iſtum non omni tempore nec ſub omnibus circumſtantiis tanta gaudere virtutis electricae copia, vt illa clare ſe manifeſtet, ſtatim ac quis tangere ipſum tentauerit. Si res ita ſe haberet, pateretur omnino bona eius valetudo, qua fruitur, neque ille tangi ſe a quocunque ſineret, cum attactus aliorum, certo tempore certisque ſub conditionibus, vel nunc etiam ſit ipſi dolorificus. Limitata ineſt ei virtus electrica, quae non niſi tempore hiemali ſe manifeſtat; aeſtate autem, licet omnes adfuerint requiſitae conditiones, nulla eius apparent indicia. Hieme etiam requiritur, vt laneum ille plantis pedum ſupponat pannum, et pellem, qua induitur, ſibi demat, quando aliis ſe electricum probare ſuſcipit. Cum enim pelle in-

 dutus

dutus ligneo inſiſtit pauimento, inermis eſt adeo vt ab omnibus impune tangatur. Obſeruatum quoque eſt, ſenes, quibus calor internus multum eſt imminutus, a contactu eius multo vehementius affici, quam iuuenes; et haec obſeruatio tam vera tamque eſt conſtans, vt in genere ſtatui poſſit, eos plus ignis electrici attrahere, qui minus caloris in ſe habent, et vice verſa. Idem enim homo tum fortiorem tum debiliorem ictum accipit, prout magis vel minus excalefactus tangere ipſum adoritur; imo et plane nihil experitur, qui corpus ſuum nimio motu ſupra modum calefecit; aſt idem ipſe, quando quietus accedit, poſt contactum non impune recedit.

Vxor illius *Puſchkin*, per commercium cum ſuo marito, eiusdem virtutis electricae facta eſt particeps. Norunt hoc matronae vrbis Tobolsk, cum quibus ei conſuetudo intercedit. Accidit enim interdum, idque ſemper hieme, vt, quando ſimul conueniunt, et pro more feminarum oſcula ſibi mutuo figunt, illico repellantur ab ea ictu electrico, quo baſia earum innita perſoluit.

Accepi hiſtoriam hanc a viris omni fide digniſſimis, qui in ipſa ſiberia ſunt nati, et hominem illum electricum in praeſenti eius ſtatu multoties viderunt, multaque pericula cum eo ipſi fecerunt. Sunt illi *Nicolaus Pochodiaſchin*, *Iohannes Panaew et Alexander Pavlutsky*, omnes hic Petropoli notiſſimi, et mihi valde familiares, qui etiam retulerunt, memoratum illum *Puſchkin* eſſe iam

in

in aetate ſatis provecta, nimirum quadraginta et quinque circiter annos natum, macilentum, tenuem atque procerum, ex nigro-fuſcum, colericum et in venerem propenſiſſimum; vitam nunc agere valde ſobriam, nihilominus in praeſenti iam ſtatu, ſub initium hiemis, ardenti laboraſſe febri, quam momentanei artuum ſuperiorum et inferiorum torpores ſatis diu praeceſſerant, eius que quaſi prodromi fuerunt.

En tota rariſſimi phoenomeni hiſtoria, quae attentionem eruditorum eo magis meretur, quod nuperrime illuſtris comes *de Caſſini* actis Academiae regiae ſcientiarum Pariſinae (*) ſimilem inſeruerit hiſtoriam de quodam Ruſſo, qui diuerſis vitae ſuae annis eandem habebat virtutem electricam, quam piſcis torpedo habet. Si eius hiſtoria, quae nondum ad nos peruenit, eadem eſt cum noſtra, tanto magis vtraque eſt vera; ſi vero ambae ſunt diuerſae, eo magis confirmant theoriam in diſſertatione de colore ſanguinis (**), quae iudicio huius Academiae proximos praemio honores tulit, pulcherrime propoſitam, quae his verbis comprehenditur: "Nerueum fluidum igneum eſſe perſuaſum habeo. Poterit, inſtar electrici, phlogiſto ſemidecompoſito, aliisque peregrinis, eſſe modifi-

 „catum.

(*) Hiſtoire de l'Acad Royale des Sciences pour l'année 177?. Voyez journal des ſavans au mois de Mai 1781.

(**) Diſſert. de igne, ſanguini prae chylo lacteque, eſſentiali, etc. §. XXIV. quae anno 1777. Petropoli eſt impreſſa.

„ catum. Non obſtat diffuſio per totum corpus, cum dif-
„ fundi videamus, in actione citius, praeſertim mentis.
„ Nec obſtant non videndi tubuli, cum tubulis non indi-
„ geat ſubtiliſſimum fluidum, per ſolida apta, et ſecun-
„ dum illa, mobile, arctiſſimae compagis interſtitia liber-
„ rime penetrans. Fauent theoriae citiſſimus effectus, in-
„ fluxus in ſanguinis craſin, digeſtionem, corporis robur
„ et, quas ab iis patitur, affectiones. Peccat modis non-
„ dum ſat perſpectis, probabiliter copia, motu."

ASTRO-

ASTRONOMICA.

THEORIA PARALLAXEOS, AD FIGVRAM TERRAE SPHAEROIDICAM ACCOMMODATA.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Quo omnia, quae ad hoc arduum argumentum pertinent, clarius exponamus, atque ad praecepta calculi ſimpliciſſima reuocemus, ab ipſo Parallaxeos fundamento vniuerſam inueſtigationem repeti conueniet. Sit igitur C centrum Terrae, in eiusque ſuperficie vbicunque ſit L locus obſeruatoris, ideoque eius diſtantia a centro recta CL, quae ad coelum vsque producta dabit huius loci zenith Z. Sit porro in S ſidus quodcunque, cuius diſtantia a centro Terrae CS, quod obſeruator cernet in directione LS, ideoque ipſi a ſuo zenith Z angulo ZLS diſtare videbitur, dum ex ipſo centro C ſub angulo ZCS a zenith diſtare videretur. Quod ſi ergo ex L ipſi CS parallela LΣ in coelum vsque ducatur, monſtrabit punctum Σ locum ſideris geocentricum, dum punctum S denotat eius Tab IX. Fig. 1.

 locum

locum apparentem; ſicque angulus S L Σ praebebit elongationem loci apparentis a loco geocentrico, ideoque ipſam Parallaxin. Cum igitur angulus S L Σ aequetur angulo C S L, reſolutio trianguli C L S ſuppeditabit veram relationem inter locum geocentricum et obſeruatum. Semper enim ſe habebit diſtantia ſideris a centro Terrae C S ad ſinum anguli Z L S, vt diſtantia obſeruatoris a centro Terrae C L ad ſinum Parallaxeos.

§. 2. Vt iam clarius intelligatur, quid de his elementis tenendum ſit in hypotheſi Terrae ſphaeroïdicae, ante omnia comparationem inſtituamus cum hypotheſi Terrae ſphaericae; vbi ſtatim recta C L aequabitur radio Terrae, ideoque vbique eandem quantitatem retinet. Tum vero punctum Z obſeruatori perpendiculariter imminet, quandoquidem recta C L ad ſuperficiem Terrae eſt normalis et cum directione grauitatis congruit; tum vero angulus obſeruatus S L Z erit elongatio ſideris a zenith, atque in hac hypotheſi ſemper erit diſtantia ſideris ad radium Terrae vti ſinus elongationis ad ſinum Parallaxeos.

§. 3. Quod ſi iam figurae Terrae ſphaeroïdicae rationem habeamus, primo quidem in ipſo ſideris loco nihil plane erit mutandum; at vero, quia locus obſeruatoris L non vbique Terrarum eandem a centro C tenet diſtantiam, pro quouis obſeruatoris loco hanc diſtantiam accurate aſſignari oportet. Deinde, quia haec diſtantia C L non vbique eſt normalis ad Terrae ſuperficiem, neque igitur cum directione grauitatis congruit, punctum Z non ſemper verticaliter imminebit loco obſeruatoris L, ſed a directione L Z modo magis modo minus declinare poterit,

poterit, pro ſitu obſeruatoris in ſuperficie Terrae. Neque ergo angulus S L Z amplius erit elongatio ſideris a vero coeli puncto verticali, quod obſeruatoris loco imminet; neque propterea amplius erit complementum altitudinis ſupra horizontem, ſub qua ſidus conſpicitur.

§. 4. Totum negotium igitur iam huc eſt perductum, vt pro quouis Terrae loco L, non ſolum eius vera diſtantia a centro, ſed etiam declinatio verae lineae verticalis a zenith exacte determinetur. Tribuamus ergo Terrae eam figuram, quae ex obſeruationibus exactiſſimis eſt concluſa, ſtatuendo rationem axis Terrae ad diametrum aequatoris vt 200 ad 201; praeterea vero ipſam Terram tanquam Sphaeroïdes ellipticum conſideremus, ortum ex reuolutione ellipſis circa axem. Principio quidem hanc inueſtigationem generaliter incipiamus.

§. 5. Sit igitur C centrum Terrae, $CA = a$ ſemidiameter aequatoris et $CB = b$ ſemiaxis Terrae, atque A L B quadrans ellipticus, cuius conuerſione circa axem B C Terrae figura oriatur, punctum vero L denotet locum quemcunque in Terrae ſuperficie, vnde ad aequatorem A C perpendiculum demittamus L P. Iam ponamus pro hoc puncto L abſciſſam $CP = x$ et applicatam $PL = y$, ſitque ipſa diſtantia $CL = \surd(xx + yy) = z$. Hinc ergo erit ex natura ellipſis $y = \frac{b}{a}\surd(aa - xx)$. Iam ducta ad curuam normali L N erit ſubnormalis Tab. IX. Fig. 2.

$$PN = -\frac{y\,dy}{dx} = \frac{bbx}{aa},$$

vnde fit interuallum $CN = \frac{(aa - bb)x}{aa}$, ac porro

$$zz = bb + \frac{(aa - bb)}{aa}xx.$$

 §. 6.

§. 6. At vero, quando in Aſtronomia locus Terrae pro cognito aſſumitur, eius eleuatio poli, ſiue latitudo in ſuperficie Terrae, tanquam cognita ſpectatur. Latitudo autem loci L ſemper aequalis eſt angulo A N L, quem directio grauitatis, quae ſemper in N L incidit, cum aequatore conſtituit. Vocemus ergo latitudinem loci L, ſiue angulum A N L $= \Phi$, atque ex eo omnia reliqua elementa figurae determinari debebunt. Cum igitur ſit

$$\text{tang.}\, \Phi = \frac{PL}{PN} = \frac{aay}{bbx}, \text{ erit tang.}\, \Phi = \frac{a}{bx} \sqrt{(aa - xx)},$$

vnde colligimus fore

$$x = \frac{aa \cos.\, \Phi}{\sqrt{(aa \cos.\, \Phi^2 + bb \sin.\, \Phi^2)}}.$$

Hinc igitur porro erit

$$y = \frac{bb \sin.\, \Phi}{\sqrt{(aa \cos.\, \Phi^2 + bb \sin.\, \Phi^2)}}.$$

Ex his iam deducimus diſtantiam loci L a centro Terrae

$$CL = z = \sqrt{\frac{a^4 \cos.\, a^2 + b^4 \sin.\, \Phi^2}{aa \cos.\, \Phi^2 + bb \sin.\, \Phi^2}},$$

id quod alterum eſt elementum, quo in calculo Parallaxeos indigemus.

§. 7. Quod iam ad alterum elementum, ſiue declinationem rectae L N ad L C attinet, vocemus iſtum angulum C L N $= \omega$, et in rectam L N productam ex C ducamus normalem C Q, tum quia ex valore pro x invento eſt interuallum

$$CN = \frac{(aa - bb)x}{aa} = \frac{(aa - bb) \cos.\, \Phi}{\sqrt{(aa \cos.\, \Phi^2 + bb \sin.\, \Phi^2)}},$$

ob angulum C N Q $= \Phi$, erit hoc perpendiculum

$$CQ = \frac{(aa - bb) \sin.\, \Phi \cos.\, \Phi}{\sqrt{(aa \cos.\, \Phi^2 + bb \sin.\, \Phi^2)}},$$

hincque deducimus

ſin.

$$\text{ſin.}\ \omega = \frac{CQ}{CL} = \frac{(aa - bb)\ \text{ſin.}\ \Phi\ \text{coſ.}\ \Phi}{\sqrt{(a^4\ \text{coſ.}\ \Phi^2 + b^4\ \text{ſin.}\ \Phi^2)}},$$

vnde porro fiet

$$\text{coſ.}\ \omega = \frac{aa\ \text{coſ.}\ \Phi^2 + bb\ \text{ſin.}\ \Phi^2}{\sqrt{(a^4\ \text{coſ.}\ \Phi^2 + b^4\ \text{ſin.}\ \Phi^2)}},$$

conſequenter

$$\text{tang.}\ \omega = \frac{(aa - bb)\ \text{ſin.}\ \Phi\ \text{coſ.}\ \Phi}{aa\ \text{coſ.}\ \Phi^2 + bb\ \text{ſin.}\ \Phi^2}.$$

§. 8. Quia angulus $ANL = \Phi$ exprimit amplitudinem arcus AL, inueſtigemus quoque curuaturam in ipſo puncto L, ſiue radium oſculi, quippe cui proportionales erunt gradus latitudinis in quolibet Meridiano ALB. Hunc in finem vocemus arcum $AL = s$, et conſtat radium oſculi in L eſſe $= \frac{ds}{d\Phi}$; quare ad elementum ds inueniendum quaeramus differentialia dx et dy, quae reperiuntur:

$$dx = \frac{-aabbd\Phi\ \text{ſin.}\ \Phi}{(aa\ \text{coſ.}\ \Phi^2 + bb\ \text{ſin.}\ \Phi^2)^{\frac{3}{2}}}\ \text{et}$$

$$dy = \frac{+aabbd\Phi\ \text{coſ.}\ \Phi}{(aa\ \text{coſ.}\ \Phi^2 + bb\ \text{ſin.}\ \Phi^2)^{\frac{3}{2}}},$$

vnde colligitur ipſum curuae elementum ds, ſiue ipſe radius oſculi

$$\frac{ds}{d\Phi} = \frac{aabb}{(aa\ \text{coſ.}\ \Phi^2 + bb\ \text{ſin.}\ \Phi^2)^{\frac{3}{2}}};$$

ex quo ſequitur, in aequatore eſſe radium oſculi $= \frac{bb}{a}$, ſub ipſo autem polo $= \frac{aa}{b}$.

§. 9. Transferamus nunc haec ad veram Terrae figuram, qua eſt $b : a = 200 : 201$, vnde ſumto ſemiaxe

$CB = 1$ erit ſemidiameter aequatoris $a = 1 + \frac{1}{200}$, pro quo ſcribamus $a = 1 + \delta$, vbi δ tam exigua eſt fractio, vt eius poteſtates in calculo tuto negligi queant. Hinc ergo pro elemento priore reperiemus

$$CL = z \sqrt{\frac{(1 + 4\delta) cof. \Phi^2 + fin. \Phi^2}{(1 + 2\delta) cof. \Phi^2 + fin. \Phi^2}} = \sqrt{\frac{1 + 4\delta \, cof. \Phi^2}{1 + 4\delta \, cof. \Phi^2}},$$

ſiue proxime

$$z = \frac{1 + 2\delta \, cof. \Phi^2}{1 + \delta \, cof. \Phi^2} = 1 + \delta \, cof. \Phi^2,$$

qui valor adhuc commodius ita exprimitur:

$$CL = z = 1 + \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{2}\delta \, cof. 2\Phi.$$

§. 10. Deinde habebimus

$$tang. \omega = \frac{2\delta \, fin. \Phi \, cof. \Phi}{1 + 2\delta \, cof. \Phi^2},$$

et quia poteſtates ipſius δ negligimus, erit ſimpliciter

$$tang. \omega = 2\delta \, fin. \Phi \, cof. \Phi = \delta \, fin. 2\Phi;$$

vnde cum ſit $\delta = \frac{1}{200}$, pro latitudine $\Phi = 45°$ erit

$$tang. \omega = \frac{1}{200} = 0{,}0050000, \text{ ideoque } \omega = 17', 11''.$$

Denique radius oſculi in puncto L erit

$$\frac{1 + 2\delta}{(1 + 2\delta \, cof. \Phi^2)^{\frac{3}{2}}} = 1 + 2\delta \, fin. \Phi^2 = 1 + \tfrac{1}{2}\delta - \tfrac{1}{2}\delta \, cof. 2\Phi.$$

Praeterea vero hinc patet, angulum A C L eſſe $= \Phi - \omega$, qui ergo angulus ſemper minor eſt quam elevatio poli, ab eaque deficit interuallo ω.

Tab. IX. Fig. 3. §. 11. Repraeſentemus haec elementa in figura ſphaerica ſolita, vbi A B referat horizontem, ſemicirculus A V B Meridianum loco obſeruatoris reſpondentem, in quo V ſit punctum verticale in coelo, quod ſimpliciter nomine

nomine verticis indicemus; tum vero P denotet Polum, ita vt arcus $BP = \Phi$. Niſi ergo polus P vel in B vel in V incidat, punctum, quod zenith vocamus, ſemper a vertice V diſcrepabit. Si enim in figura praecedente rectae C B, C L et N L vsque in coelum producantur, prima C B tendebit in polum P, ſecunda C L dabit punctum Z, quod eſt zenith, at tertia N L in coelo dabit verticem V. Vnde patet, haec tria puncta, P, V, Z in idem planum, ſcilicet in planum meridiani loci L incidere, atque zenith Z ſemper longius a Polo P diſtare quam verticem V, idque interuallo Z L V, quem angulum vocauimus ω. Quare a vertice V ad partem Polo oppoſitam capiamus interuallum $VZ = \omega$, eritque Z verum zenith loci propoſiti; vnde ſi ſidus quodcunque obſeruetur in puncto S, eius diſtantia apparens a zenith erit arcus Z S, in quo producto exiſtet locus geocentricus eiusdem ſideris Σ, ſumto ſcilicet interuallo $S\Sigma$ aequali Parallaxi, quemadmodum ex prima figura eſt manifeſtum; vnde patet, reſpectu verticis V haec puncta S et Σ notabiliter diſcrepare a hypotheſi Terrae ſphaericae, hocque diſcrimen plurimum variare, tam pro variis loci altitudinibus, quam pro ſitu ſideris S. Tab. IX. Fig. 2. Fig. 3.

§. 12. Nunc, quoniam effectus Parallaxeos $S\Sigma$ pendet vel ab arcu Z S vel ab arcu $Z\Sigma$, praemittamus duo Problemata, prouti vel arcus Z S, vel arcus $Z\Sigma$ fuerit datus; vnde oporteat ipſam Parallaxin $S\Sigma$ definire. In vtroque autem aſſumamus, praeter diſtantiam obſeruatoris a centro Terrae, quam poſuimus $= z$, etiam datam eſſe diſtantiam ſideris a centro Terrae, quam ponemus $= s$, ita vt fractio $\frac{z}{s}$ denotet id quod Aſtronomi appellant Parallaxin hori-

horizontalem. Quia autem hacc denominatio deſumta eſt ex hypotheſi Terrae ſphaericae, in ſequentibus calculis potius hanc ipſam fractionem $\frac{z}{s}$ retineamus, eiusque loco breu. gr. ſcribamus literam π, cuius valor pro Luna vix vltra $\frac{1}{60}$ aſſurgit; pro aliis vero ſideribus incomparabiliter eſt minor.

Problema praeliminare I.

Tab. IX, Fig. 1. §. 13. *Data diſtantia obſeruatoris a centro Terrae* $CL = z$, *vna cum diſtantia ſideris ab hoc centro* $CS = s$, *ſi cognitus fuerit angulus* ZLS, *inuenire angulum* $ZL\Sigma$, *hincque Parallaxin, ſiue angulum* $SL\Sigma$.

Solutio.

Ponatur igitur angulus $ZLS = \zeta$, atque ex triangulo CLS ſtatim habemus hanc analogiam:

$$CS : CL = \text{ſin.}\, \zeta : \text{ſin.}\, SL\Sigma,$$

vnde ſtatim colligitur

$$\text{ſin.}\, SL\Sigma = \frac{CL\, \text{ſin.}\, \zeta}{CS} = \pi\, \text{ſin.}\, \zeta,$$

hocque angulo ſubtracto ab angulo $ZLS = \zeta$, relinquetur angulus $ZL\Sigma$ ſiue ZCS. Quod ſi iam haec ad figuram tertiam transferamus, erit arcus $ZS = \zeta$ et arcus
Fig. 3. $S\Sigma = \pi\, \text{ſin.}\, \zeta$, hincque porro arcus $Z\Sigma = \zeta - \pi\, \text{ſin.}\, \zeta$.

§. 14. Quia Parallaxis $S\Sigma$ vix vnquam vnum gradum ſuperare ſolet, eius ſinus ab ipſo arcu non diſcrepabit, hincque ſtatim ipſa Parallaxis in minutis ſecundis expreſſa obtineri poteſt, ſi a logarithmo formulae $\pi\, \text{ſin.}\, \zeta$

ſubtra-

ſubtrahatur iſte logarithmus conſtans 4, 6855749; ac ſi iſte logarithmus a $l\,\pi$ ſubtrahatur, habebitur Parallaxis horizontalis vulgo ſic dicta, quae cum reſpondeat angulo $\zeta = 90°$, euidens eſt, punctum S hoc caſu non in horizontem incidere, quippe qui 90 gradibus diſtat, non a zenith Z, ſed a vertice V. Tab. IX Fig. 3.

Problema praeliminare II.

§. 15. *Data diſtantia obſeruatoris a centro Terrae, vna cum diſtantia ſideris ab eodem centro, ſi cognitus fuerit angulus* Z L Σ *ſiue* Z C S $= \eta$, *inuenire Parallaxin, ſiue angulum* L S C.

Solutio.

Ex L in rectam C S demittatur perpendiculum L M, eritque L M $= z$ ſin. η et C M $= z$ coſ. η, hincque fiet S M $= s - z$ coſ. η, vnde iam ſequitur tangens anguli L S C, ſiue Parallaxeos, cum ſit Fig. 1.

$$\text{tang. } LSC = \frac{z \text{ ſin. } \eta}{s - z \text{ coſ. } \eta} = \frac{\pi \text{ ſin. } \eta}{1 - \pi \text{ coſ. } \eta},$$

et quia π ſemper eſt fractio ſatis parua, erit

$$\frac{1}{1 - \pi \text{ coſ. } \eta} = 1 + \pi \text{ coſ. } \eta,$$

hincque deducitur

$$\text{tang. } LSC = \text{tang. } SL\Sigma = \pi \text{ ſin. } \eta + \pi\pi \text{ ſin. } \eta \text{ coſ. } \eta$$
$$= \pi \text{ ſin. } \eta + \tfrac{1}{2}\pi\pi \text{ ſin. } 2\eta;$$

hic autem angulus, ſi ad angulum Z L Σ $= \eta$ addatur, producit angulum Z L S, quem ante nominauimus $= \zeta$. Transferantur nunc haec ad figuram ſphaericam, vbi L Fig. 3.

 conci-

concipitur in centro Sphaerae, eritque arcus $Z\Sigma = \eta$, vnde ergo erit

$$\text{tang. } S\Sigma = \pi \text{ ſin. } \eta + \tfrac{1}{2}\pi\pi \text{ ſin. } 2\eta.$$

§. 16. Vulgo quidem in determinatione Parallaxeos hi duo arcus $ZS = \zeta$ et $Z\Sigma = \eta$ promiſcue vſurpari ſolent: at vero pro Luna diſcrimen notabile oriri poteſt, quod ex termino $\tfrac{1}{2}\pi\pi$ ſin. 2η aeſtimari poterit. Sumto enim $\pi = \tfrac{1}{60}$ et $\eta = 45°$, valor formae $\tfrac{1}{2}\pi\pi$ ſin. 2η fiet $= \tfrac{1}{7200}$. Quia nunc vnitas aequivalet angulo $57°, 17' = 3437'$, euidens eſt, eius valorem circiter ad ſemiminutum ſiue 30 circiter minuta ſecunda aſſurgi poſſe.

§. 17. Haec duo Problemata fundamenta conſtituunt omnium ſequentium inueſtigationum circa Parallaxin; verum antequam omnes quaeſtiones huc pertinentes rite euoluere licet, tabulam computemus, quae pro ſingulis latitudinibus loci obſeruatoris ϕ exhibeat ſequentia elementa:

1°. Diſtantiam obſeruatoris a centro Terrae $CL = z$.

2°. Differentiam inter verticem et zenith, ſiue interuallum $VZ = \omega$, ac

3°. Radium oſculi pro loco obſeruatoris, quem ponamus $= r$.

Hic calculus ex formulis ante inuentis facile expedietur, cum ſit

$$z = 1 + \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{2}\delta \text{ coſ. } 2\phi$$

$$\text{tang. } \omega = \delta \text{ ſin. } 2\phi$$

$$r = 1 + \tfrac{1}{2}\delta - \tfrac{3}{2}\delta \text{ coſ. } 2\phi.$$

Tabu-

Tabulam autem hanc conſtruemus ad hypotheſin

$$\delta = \frac{1}{200} = 0,00500;$$

vnde, ſi forte valor exactior innotuerit, correctiones inde fluentes facile aſſignare licebit. Interim autem, loco δ hunc valorem ſubſtituendo, formulae ternae pro tabula conſtruenda neceſſariae hanc formam induunt:

$$z = 1,002500 + \tfrac{1}{400} \operatorname{coſ.} 2\Phi$$

$$\operatorname{tang.} \omega = \tfrac{1}{200} \operatorname{ſin.} 2\Phi$$

$$r = 1,002500 - \tfrac{3}{200} \operatorname{coſ.} 2\Phi.$$

Φ	z	ω		r
0°	1, 005000	0′	0″	0, 995000
1	1, 004998	0	36	0, 995005
2	1, 004994	1	12	0, 995018
3	1, 004986	1	48	0, 995041
4	1, 004976	2	24	0, 995073
5	1, 004962	2	59	0, 995114
6	1, 004945	3	34	0, 995164
7	1, 004926	4	9	0, 995223
8	1, 004903	4	44	0, 995291
9	1, 004878	5	18	0, 995367
10	1, 004849	5	53	0, 995452
11	1, 004818	6	26	0, 995546
12	1, 004784	6	59	0, 995648
13	1, 004747	7	32	0, 995759
14	1, 004707	8	4	0, 995878
15	1, 004665	8	36	0, 996005
16	1, 004620	9	7	0, 996140
17	1, 004573	9	37	0, 996282
18	1, 004523	10	6	0, 996433

Φ	z	ω		r
19°	1, 004470	10′	35″	0, 996590
20	1, 004415	11	3	0, 996755
21	1, 004358	11	30	0, 996926
22	1, 004298	11	56	0, 997105
23	1, 004237	12	22	0, 997290
24	1, 004173	12	46	0, 997482
25	1, 004107	13	10	0, 997679
26	1, 004039	13	33	0, 997883
27	1, 003969	13	54	0, 998011
28	1, 003898	14	15	0, 998306
29	1, 003825	14	35	0, 998526
30	1, 003750	14	53	0, 998750
31	1, 003674	15	11	0, 998978
32	1, 003596	15	27	0, 999212
33	1, 003517	15	42	0, 999450
34	1, 003436	15	56	0, 999692
35	1, 003355	16	9	0, 999935
36	1, 003272	16	21	0, 000283
37	1, 003189	16	31	1, 000433
38	1, 003105	16	41	1, 000686
39	1, 003020	16	49	1, 000940
40	1, 002934	16	55	1, 001198
41	1, 002896	17	1	1, 001456
42	1, 002761	17	6	1, 001716
43	1, 002674	17	9	1, 001977
44	1, 002587	17	10	1, 002239
45	1, 002500	17	11	1, 002500
46	1, 002413	17	10	1, 002761
47	1, 002326	17	9	1, 003023

Φ

Φ	z	ω		r
48°	1,002239	17′	6″	1,003284
49	1,002153	17	1	1,003544
50	1,002066	16	55	1,003802
51	1,001980	16	49	1,004060
52	1,001895	16	41	1,004314
53	1,001811	16	31	1,004567
54	1,001728	16	21	1,004717
55	1,001645	16	9	1,004065
56	1,001564	15	56	1,005308
57	1,001483	15	42	1,005550
58	1,001404	15	27	1,005788
59	1,001326	15	11	1,006022
60	1,001250	14	53	1,006250
61	1,001175	14	35	1,006474
62	1,001102	14	15	1,006694
63	1,001031	13	54	1,006989
64	1,000961	13	33	1,007117
65	1,000893	13	10	1,007321
66	1,000827	12	46	1,007518
67	1,000763	12	22	1,007710
68	1,000702	11	56	1,007895
69	1,000642	11	30	1,008074
70	1,000585	11	3	1,008245
71	1,000530	10	35	1,008410
72	1,000478	10	6	1,008567
73	1,000427	9	37	1,008718
74	1,000380	9	7	1,008860
75	1,000335	8	36	1,008995
76	1,000293	8	4	1,009122

Φ	z	ω		r
77°	1, 000253	7′	32″	1, 009241
78	1, 000216	6	59	1, 009352
79	1, 000182	6	26	1, 009454
80	1, 000151	5	53	1, 009547
81	1, 000122	5	18	1, 009633
82	1, 000097	4	44	1, 009709
83	1, 000074	4	9	1, 009777
84	1, 000055	3	34	1, 009836
85	1, 000038	2	59	1, 009886
86	1, 000024	2	24	1, 009927
87	1, 000014	1	48	1, 009959
88	1, 000006	1	12	1, 009982
89	1, 000002	0	36	1, 009995
90	1, 000000	0	0	1, 010000

§. 18. Circa hanc tabulam ante omnia eſt obſeruandum, eam potiſſimum Parallaxi Lunae determinandae eſſe deſtinatam, quippe quae adeo integrum gradum ſuperare ſolet. Quoniam enim Parallaxes Planetarum vix vnquam ſemiminutum primum excedere poſſunt, hypotheſis Terrae ſphaericae iis definiendis omnino ſufficit, atque ſuperfluum foret iſtam tabulam in ſubſidium vocare. Quin etiam, ſi quando aliquis Cometa ad Terram tam prope accederet, vt vſus huius Tabulae neceſſarius videri poſſet, tum plerumque nunquam eius loca tam exacte definire licet, vt aberratio plurium ſecundorum ſpectari mereretur.

§. 19. Quoniam igitur haec tabula vnice motui Lunae determinando inſeruire eſt cenſenda, notandum eſt, in

in tabulis lunaribus non eius veram diſtantiam a Terra aſſignari, ſed eius loco Parallaxin horizontalem ſub ipſo Aequatore exhiberi ſolere. Hanc ergo deſignemus litera *ae*, cuius valor, cum ante diſtantia Lunae a Terra poſita ſit $= s$, et ſemidiamer Aequatoris $= 1 + \delta$, erit

$$ae = \frac{1+\delta}{s}.$$

Quare cum ſupra poſuerimus pro Terrae loco quocunque eius diſtantiam a centro $= z$, ibique Parallaxin horizontalem $\frac{z}{s} = \pi$, ſemper erit $\pi = \frac{ae\, z}{1+\delta}$. Cum igitur pro eleuatione Poli $= \Phi$ invenerimus

$$z = 1 + \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{2}\delta \operatorname{coſ.} 2\Phi = 1 + \delta \operatorname{coſ.} \Phi^2, \text{ erit}$$

$$\pi = \frac{ae\,(1 + \delta \operatorname{coſ.} \Phi^2)}{1+\delta},$$

quae formula, ob $\frac{1}{1+\delta} = 1 - \delta$, reducitur ad hanc:

$$\pi = ae\,(1 - \delta + \delta \operatorname{coſ.} \Phi^2) = ae\,(1 - \delta \operatorname{ſin.} \Phi^2)$$

ſiue etiam

$$z = ae\,(1 - \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{2}\delta \operatorname{coſ.} 2\Phi).$$

Quia igitur erat

$$z = 1 + \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{2}\delta \operatorname{coſ.} 2\Phi, \text{ erit quoque } \pi = ae\,(z - \delta).$$

§. 20. Quoniam igitur Parallaxis Lunae *aequatorea* pro variis eius locis in ſua orbita ab 54′ vsque ad 62′ increſcere circiter poteſt, pro quolibet eius valore ad omnes latitudines loci Parallaxin Lunae horizontalem facile computare licebit, quem infinem ſequentem Tabulam adiiciemus, in qua pro his nouem Parallaxibus aequatoreis: 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61 et 62. Parallaxin horizontalem ad Latitudines quinis gradibus increſcentes exhibebimus. Et quia hae Parallaxes ab Aequatore vsque ad Polum continuo decreſcunt, haec Tabula oſtendet, quot minuta

minuta ſecunda a Parallaxi aequatorea ſubtrahi debeant, vt Parallaxis horizontalis pro quolibet obſeruatoris loco obtineatur, ſiue oſtendet valorem formulae $ae - \pi$, qui eſt $ae\,(\frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2}\delta\ \text{coſ.}\ 2\,\Phi)$; atque ob $\delta = \frac{1}{200}$ erit

$$ae - \pi = \frac{ae}{400}(1 - \text{coſ.}\ 2\,\Phi).$$

TABVLA
Valores $ae - \pi$ exhibens, ad quinos gradus Latitudinis computata.

Lat. loci Φ	Parallaxis aequatorea. 54′	55′	56′	57′	58′	59′	60′	61′	62′
0°	0″,00	0″,00	0″,00	0″,00	0″,00	0″,00	0″,00	0″,00	0″,00
5	0, 12	0, 12	0, 12	0, 13	0, 13	0, 13	0, 13	0, 14	0, 14
10	0, 49	0, 50	0, 51	0, 52	0, 53	0, 54	0, 54	0, 55	0, 56
15	1, 08	1, 10	1 13	1, 16	1, 17	1, 19	1, 21	1, 23	1, 25
20	1, 89	1, 91	1, 95	2, 00	2, 03	2, 07	2, 10	2, 13	2, 17
25	2, 89	2, 94	2, 99	3, 05	3, 10	3, 15	3, 20	3, 25	3, 31
30	4, 05	4, 12	4, 19	4, 27	4, 34	4, 41	4, 49	4, 57	4, 65
35	5, 33	5, 43	5, 53	5, 63	5, 72	5, 82	5, 92	6, 02	6, 12
40	6, 69	6, 81	6, 94	7, 07	7, 19	7, 31	7, 44	7, 56	7, 68
45	8, 10	8, 25	8, 40	8, 55	8, 70	8, 85	9, 00	9, 15	9, 30
50	9, 51	9, 67	9, 83	10, 00	10, 18	10, 36	10, 54	10, 72	10, 91
55	10, 87	11, 07	11, 27	11, 47	11, 67	11, 87	12, 07	12, 27	12, 47
60	12, 15	12, 37	12, 59	12, 82	13, 05	13, 27	13, 50	13, 72	13, 96
65	13, 30	13, 55	13, 80	14, 05	14, 29	14, 53	14, 78	15, 02	15, 27
70	14, 30	14, 56	14, 83	15, 10	15, 36	15, 62	15, 89	16, 15	16, 42
75	15, 11	15, 39	15, 67	15, 95	16, 23	16, 51	16, 79	17, 07	17, 35
80	15, 71	15, 99	16, 28	16, 58	16, 87	17, 16	17, 45	17, 74	18, 03
85	16, 08	16, 37	16, 67	16, 97	17, 26	17, 56	17, 86	18, 16	18, 45
90	16, 20	16, 50	16, 80	17, 10	17, 40	17, 70	18, 00	18, 30	18, 60

§. 21.

§. 21. Haec tabula vsque ad partes centeſimas minuti ſecundi eſt computata, quo ordo in his numeris clarius pateret; in vſu enim has partes tuto omittere licebit. Tum vero minuta ſecunda in hac tabula conſignata ſemper a Parallaxi aequatorea ſubtrahi oportet, vt prodeat Parallaxis horizontalis pro latitudine propoſita. Ita ſi obſeruator reperiatur ſub latitudine 60°, et Parallaxis aequatorea Lunae tempore obſeruationis ſit 55′, inde ſubtrahi debent 12 minuta ſec. ſicque Parallaxis horizontalis hoc loco erit 54′, 48″. Sin autem eo tempore Parallaxis aequatorea fuerit 61′, Parallaxis horizontalis erit $61' - 14'' = 60', 46''$. Ceterum, quamquam haec tabula tantum ad integra minuta prima Parallaxis aequatoreae eſt computata, facile tamen erit interpolationem pro omnibus valoribus intermediis inſtituere, id quod etiam tenendum eſt, ſi latitudo obſeruatoris non in hac tabula reperiatur: vtroque enim caſu interpolatio ſine calculo, ſola aeſtimatione fieri poterit.

§. 22. Quo iam vſum huius Tabulae clarius oſtendamus, primo aſſumemus, Lunam in ipſo Meridiano eſſe obſeruatam, et docebimus, quomodo inde eius verus locus geocentricus determinari debeat. Deinde quaeſtionem invertemus, et ex dato loco Lunae geocentrico tempore culminationis inquiremus, ſub quanam altitudine obſeruatori apparere debeat. Porro vero vtramque quaeſtionem pro iis caſibus reſoluemus, quibus Luna in ipſo Horizonte obſeruatur. Denique vero procedemus ad Lunae loca quaecunque alia, quibus non ſolum diſtantia Lunae a vertice, ſed etiam eius Azimuth quaeri debebit.

Tab. IX. Fig. 4.

Problema I.

Si Luna in ipſo Meridiano ab obſeruatore ad datam latitudinem conſtituto in S obſeruetur, eiusque diſtantia a vertice, ſiue arcus V S innoteſcat, inueſtigare eius verum locum geocentricum Σ, ſiquidem pro hoc tempore Parallaxis Lunae aequatorea fuerit cognita.

Solutio.

§. 23. In Meridiano loci A V B, Horizonte A B inſiſtente, ſit V vertex loci, in quo obſeruator verſatur, et P Polus, cuius eleuatio, ſiue latitudo obſeruatoris ſit $BP = \phi$, vnde ex tabula deſumatur interuallum $VZ = \omega$; porro vero vocetur arcus $VS = f$, cuius ergo complementum dabit altitudinem Lunae obſeruatam, ſiue arcum A S. Praeterea ſit *ae* Parallaxis aequatorea Lunae, pro qua poſtrema Tabula ſtatim dabit π, ſiue Parallaxin horizontalem pro loco propoſito.

§. 24. Iam ad punctum S, ſeu locum Lunae geocentricum inueſtigandum, notemus eſſe arcum $ZS = f - \omega$, quem in Problemate praeliminari priori vocauimus $= \zeta$, ſiquidem hic arcus Z S praebet diſtantiam loci obſeruati S a zenith Z, vnde idem illud Problema nobis dabit

$$S\Sigma = \pi \operatorname{ſin.}(f - \omega) = \pi \operatorname{ſin.} f \operatorname{coſ.} \omega - \pi \operatorname{coſ.} f \operatorname{ſin.} \omega.$$

Hic autem, ob arculum $VZ = \omega$ tam exiguum, vt eius poteſtates tuto negligi queant, ſumere licebit $\operatorname{coſ.} \omega = 1$ et $\operatorname{ſin.} \omega = \omega$, vnde fiet $S\Sigma = \pi \operatorname{ſin.} f - \pi \omega \operatorname{coſ.} f$, hincque ergo erit diſtantia $V\Sigma = f - S\Sigma$, cui ſi addatur arcus $PV = 90^\circ - \phi$, prodibit diſtantia loci geocentrici Σ a polo P,

P, cuius complementum eſt eius declinatio, hincque porro tam Lunae longitudo quam latitudo per praecepta cognita inueniri poterit, quandoquidem ex tempore culminationis innoteſcit aſcenſio recta.

§. 25. Verum ſi hypotheſi Terrae ſphaericae in hoc calculo eſſemus vſi, produiſſet hoc interuallum $S \Sigma = \pi$ ſin. f; vnde patet, hanc hypotheſin errorem valde notabilem producere poſſe, cum ſit $= \pi \omega$ coſ. f. Quo hoc clarius perſpiciatur conſideretur caſus, quo $\pi = \frac{1}{60}$, $\omega = 17'$, ita vt eleuatio Poli $= 45°$; tum vero arcum f ſtatuamus $= 30°$, eritque error $= \frac{1}{4}$ proxime, ſiue $= 15''$, qui error, mutatis circumſtantiis, propemodum vsque ad $18''$ aſcendere poteſt, et cum iſte error $\pi \omega$ coſ. f ſemper ſit negatiuus, euidens eſt, verum punctum Σ, ſiue locum Lunae geocentricum, aliquanto longius a Polo P diſtare, quam ſi Terra ſphaerica aſſumeretur. Ex hoc autem errore adhuc maior error in longitudinem et latitudinem Lunae influere poteſt. Ac ſi perpendamus, in altitudine Lunae obſeruata errorem quoque plurium ſecundorum committi poſſe, dum inſuper ipſa Poli eleuatio nunquam ad aliquot minuta ſecunda certa eſſe ſolet, diſtantia a Polo P fortaſſe vltra 30 minuta ſecunda a veritate aberrare poterit. Praeterea in ipſo momento obſeruationis, vnde aſcenſio recta deduci debet, error vnius ſecundi temporis, vnde $15''$ in aſcenſione recta oriuntur, vix euitari poteſt. Quin etiam, quia haec aſcenſio recta a loco Solis computatur, quem raro intra quindecim minuta ſecunda aſſignare exactum licet, manifeſtum eſt, omnes hos errores iunctim ſumtos facile integrum minutum primum ſuperari poſſe; ex quo intelligitur,

 loca

loca Lunae, ex huiusmodi obſeruationibus concluſa, plus quam minuto primo fallere poſſe.

§. 26. Cum error hypotheſis ſphaericae ſit $-\pi\omega\,\text{coſ.}\,f$, patet, eum duobus caſibus euaneſcere poſſe: altero quo $\omega = 0$, quod euenit, vel quando obſeruator ſub ipſo Aequatore verſatur, vel ſub ipſo Polo; altero vero, quando $f = 90°$, hoc eſt, quando Luna in Horizonte conſpicitur. Hinc igitur aſcendendo error continuo increſcet, atque adeo vsque ad verticem V, vel zenith Z. Si enim punctum S in zenith Z cadat, Parallaxis reuera erit nulla, cum tamen in hypotheſi ſphaerica ſit $\pi\,\text{ſin.}\,\omega$, cuius valor, caſu quo $\pi = 63'$ et $\omega = 17'$ fit $19''$. Verum quia hic $\omega = 17'$, ideoque altitudo Poli $= 45°$, Luna nunquam vsque ad zenith aſcendere poteſt. Idem euenit, ſi Luna vsque ad verticem aſcenderet, tum enim Parallaxis euaneſceret in hypotheſi Terrae ſphaericae; reuera autem iterum erit $= \pi\,\text{ſin.}\,\omega$, quo interuallo Luna magis a Polo remouetur. Quo autem applicatio noſtrae Tabulae clarius appareat, aliquot exempla ſubiungamus.

Exemplum 1.

§. 27. *Sub eleuatione Poli* 40°, 30′, *altitudo centri Lunae meridiana obſeruata eſt* 77°, 30′, *quo tempore Parallaxis aequatorea erat* 61′, *inuenire verum locum geocentricum.*

Hic ergo erat $\Phi = 40°, 30'$, vnde reperitur interuallum $VZ = \omega = 16'.\ 58''$. Deinde erit diſtantia Lunae obſeruata a vertice $= 12°, 30' = f$. Porro vero Parallaxis

ae-

aequatorea $61'$ diminui debebit $8''$, ita vt ſit Parallaxis horizontalis $\pi = 60', 52''$. Hinc ergo ob $f - \omega = 12°, 13', 2''$ calculus pro interuallo Σ S ita inſtituetur:

$$l\pi = 3,56253$$
$$l\,\text{ſin.}\,(f-\omega) = 9,32553$$
$$l\,S\Sigma = 2,88806$$
$$\text{ergo } S\Sigma = 773'' = 12', 53'',$$

quod ergo interuallum, ad altitudinem obſeruatam additum, dabit altitudinem Lunae veram $= 77°, 42', 53''$, ſiue ſubtractum ab angulo f, relinquet diſtantiam a vertice $V\Sigma = 12°, 17', 7''$, ideoque eius diſtantia a Polo P erit $= 61°, 47', 7''$. At vero in hypotheſi Terrae ſphaericae calculus ita ſe habebit:

$$l\pi = 3,56253$$
$$l\,\text{ſin.}\,f = 9,33534$$
$$l\,S\Sigma = 2,89787$$
$$\text{ergo } S\Sigma = 790'' = 13', 10'',$$

ſicque error huius hypotheſis eſt $17''$.

Exemplum 2.

§. 28. *Sub eleuatione Poli 59°, 56', in ipſo Meridiano obſeruata eſt altitudo centri Lunae 8°, 43', quo tempore Parallaxis aequatorea erat 57', 27'', quaeritur locus Lunae geocentricus.*

Hic ergo eſt $\Phi = 59°, 56'$, tum vero arcus V S $= f = 81°, 17'$. Iam a Parallaxi aequatorea ſubtrahi oportet $13''$, ita vt ſit $\pi = 57', 14''$. Hinc ergo erit inter-

 val-

vallum V Z $= \omega = 14', 53''$, vnde fit $f - \omega = 81°, 2', 7''$, hincque porro $S\Sigma = \pi$ ſin. $(f - \omega)$, ſiue $S\Sigma = 3404$ ſin. $81°, 2', 7''$; calculus igitur, ſimul inſtitutus pro hypotheſi ſphaerica, ita ſe habet:

$l\,\pi = 3,53580$	$l\,\pi = 3,53580$
l ſin. $f = 9,99495$	l ſin. $(f - \omega) = 9,99466$
$l\,S\Sigma = 3,53075$	$l\,S\Sigma = 3,53046$
ergo $S\Sigma = 3394'' = 56', 34''$	ergo $S\Sigma = 3392'' = 56', 32''$

ſicque error tantum eſt $2''$. Altitudo ergo Lunae vera erit $9°, 39', 32''$, ideoque diſtantia a vertice $80°, 20', 28''$, ita vt, ob $VP = 30°, 4'$, diſtantia a Polo ſit $110°, 24', 28''$, ſicque declinatio Lunae Auſtralis $= 20°, 24', 28''$.

Exemplum 3.

§. 29. *Sub altitudine Poli* $72°, 15'$ *obſeruatur altitudo centri Lunae in Meridiano Septemtrionem verſus* $= 9°, 45'$, *quo tempore Parallaxis aequatorea fuerit* $59', 40''$, *quaeritur locus Lunae geocentricus.*

Tab. IX. Fig. 5. Hic ergo eſt $\Phi = BP = 72°, 15'$ et arcus $VS = f = 80°, 15'$. Iam a Parallaxi aequatorea ſubtrahi debent $16''$, vnde fit $\pi = 59', 24'' = 3564''$. At vero ob $\Phi = 72°, 15'$ erit interuallum $VZ = \omega = 10'$, ſicque erit $ZS = 80°, 25'$. Scilicet hoc caſu ω vt negatiuum ſpectari debet reſpectu puncti S, ita vt ſumi debeat $f + \omega = 80°, 25'$ et iam erit $S\Sigma = \pi$ ſin. $(f + \omega)$.

$l\,\pi$

$$l\,\pi = 3,55194$$
$$l\,\text{ſin.}\,(f + \omega) = 9,99390$$
$$l\,S\,\Sigma = 3,54584$$

ideoque $S\,\Sigma = 3514'' = 58', 34''$

ideoque vera altitudo ſuper horizonte erat 10°, 43′, 34″.

Problema II.

Si in duobus Terrae locis, ſub eodem Meridiano ſitis, culminatio Lunae eiusque altitudo ſimul obſeruentur, ex comparatione harum duarum obſeruationum Parallaxin Lunae aequatoream ad idem tempus definire.

Solutio.

§. 30. Conſideremus hic integrum Meridianum, in quo puncta P et P′ ſint ambo Poli oppoſiti, vt bini obſeruatores citra et vltra Aequatorem ſupponi queant; quandoquidem, vt ex huiusmodi obſeruationibus concluſio certa deduci queat, obſeruatores a ſe inuicem maxime remoti aſſumi debent. Sit ergo prioris obſeruatoris in ſuperiore Hemiſphaerio vertex in V, eiusque latitudo $= \phi$, ideoque arcus $P\,V = 90° - \phi$. Tum vero ſit S locus Lunae obſeruatus, eiusque diſtantia $V\,S = f$. Alterius vero Obſeruatoris in Hemiſphaerio Auſtrali vertex ſit in V′, cuius latitudo ſit $= \phi'$, quae ergo reſpectu prioris vt negatiua eſt ſpectanda, ita vt eius diſtantia a Polo P ſit $90° + \phi'$. Luna autem ab eo obſeruetur in puncto S′, ponaturque arcus $V'\,S' = f'$. Verus autem locus Lunae geocentricus ſit in Σ, qui ergo vtrique obſeruatori eſt communis. Hoc autem punctum, ſi vt ſupra pro vtroque obſeruatore determinetur, neceſſe eſt, vt ſumma arcuum $V\,\Sigma$ Tab. IX. Fig. 6.

et

et $V' \Sigma$ aequetur ſummae ambarum Latitudinum, hoc eſt $\Phi + \Phi'$, ex qua porro aequatione Parallaxis aequatorea Lunae, quae ſit $= ae$, erui debet.

§. 31. Nunc igitur vtramque obſeruationem euoluamus vt ante, ſitque pro priore obſeruatore zenith in Z, eritque $VZ = \delta$ ſin. 2Φ, Parallaxis autem horizontalis pro iſto loco erit $\pi = ae(1 - \delta \text{ ſin. } \Phi^2)$. Hinc ergo interuallum $S\Sigma$ erit $= \pi$ ſin. ZS, hoc eſt

$$S\Sigma = ae(1 - \delta \text{ ſin. } \Phi^2) \text{ ſin. } (f - \delta \text{ ſin. } 2\Phi),$$

quae formula transmutatur in hanc:

$$S\Sigma = ae(\text{ſin. } f - \delta \text{ ſin. } \Phi^2 \text{ ſin. } f - \delta \text{ ſin. } 2\Phi \text{ coſ. } f).$$

Hinc ergo habebimus arcum $V\Sigma = f - S\Sigma$, ſiue

$$V\Sigma = f - ae(\text{ſin. } f - \delta \text{ ſin. } \Phi^2 \text{ ſin. } f - \delta \text{ ſin. } 2\Phi \text{ coſ. } f).$$

Ac poſito brev. gr.

$$\text{ſin. } f - \delta \text{ ſin. } \Phi^2 \text{ ſin. } f - \delta \text{ ſin. } 2\Phi \text{ coſ. } f = F$$

fiet arcus $V\Sigma = f - ae F$.

§. 32. Simili modo pro altero obſeruatore, cuius vertex eſt in V', ſit Z' eius zenith, eritque $V'Z' = \delta$ ſin. $2\Phi'$, parallaxis vero horizontalis hoc loco, quae ſit $= \pi'$, erit $\pi' = ae(1 - \delta \text{ ſin. } \Phi'^2)$. Quamobrem, ſi iterum breuitatis gratia ponamus, vt ſupra

$$\text{ſin. } f' - \delta \text{ ſin. } \Phi'^2 \text{ ſin. } f' - \delta \text{ ſin. } 2\Phi' \text{ coſ. } f' = F'$$

erit interuallum $V'\Sigma = f' - ae F'$. His inuentis, cum ſumma arcuum $V\Sigma$ et $V'\Sigma$ ſit $\Phi + \Phi'$, habebimus hanc aequationem $\Phi + \Phi' = f + f' - ae(F + F')$, ex qua aequatione elicimus Parallaxin aequatoream

$$ae = \frac{f + f' - \Phi - \Phi'}{F + F'}.$$

§. 33.

§. 33. Reſtituamus nunc loco F et F' valores aſſumtos, eritque Parallaxis quaeſita:

$$ae = \frac{f + f' - \Phi - \Phi'}{\sin.f + \sin.f' - \delta(\sin.f \sin.\Phi^2 + \sin.f' \sin.\Phi'^2 - \delta(\cos.f \sin.2\Phi + \cos.f' \sin.2\Phi')}$$

quae formula ob figuram Terrae ſphaeroidicam ſatis quidem eſt complicata; interim tamen facili calculo expeditur, ſumto ſcilicet $\delta = \frac{1}{230}$. Sin autem Terra perfecte eſſet ſphaerica et $\delta = 0$, aequatio noſtra ſatis ſimplex euaderet, cum inde ſit $ae = \frac{f + f' - \Phi - \Phi'}{\sin.f + \sin.f'}$. Praeterea vero ſi diſtantia Lunae eſſet infinita, ideoque eius Parallaxis nulla, vtique foret $f + f' = \Phi + \Phi'$, ideoque numerator euaneſceret.

§. 34. Immediate ergo ex obſeruationibus conſtant quatuor arcus Φ, Φ', f', f', atque neglectis partibus a δ pendentibus iam ſatis exacte habebitur $ae = \frac{f + f' - \Phi - \Phi'}{\sin.f + \sin.f'}$, quo inuento facile erit inueſtigare, quanta ſui parte Parallaxis, ob terminos litera δ affectos, augere debeat. Perſpicuum enim eſt, ob veram Terrae figuram Parallaxin ae ſemper aliquanto maiorem prodire debere. Haec enim augmentatio ſemper fieri debet in ratione:

$$1 : 1 + \frac{\delta(\sin.f \sin.\Phi^2 + \sin.f' \sin.\Phi'^2 + \cos.f \sin.2\Phi + \cos.f' \sin.2\Phi')}{\sin.f + \sin.f'}.$$

Quoniam autem exemplum completum afferre non licet, inquiramus tantum in correctionem, quam vera Terrae figura producit, vbi quidem facile intelligitur, ſufficere, ſi arcus f et f' propemodum tantum innoteſcant. Aſſumamus igitur eſſe $\Phi = 52°, 30'$ et $\Phi' = 35°$; tum vero $f = 42°$ et $f' = 46°, 30'$, atque numeratoris noſtrae fractionis quatuor partes erunt:

I. = 0, 42117
II. = 0, 23864
III. = 0, 71782
IV. = 0, 64685 Hinc numerator prodit

= 2, 02448, cuius pars 200ma fit 0, 019122, quae, diuiſa per ſin. f + ſin. f' = 1, 39450, praebet correctionem quaeſitam = 0, 007259, quae ſcilicet eſt augmentatio Parallaxis aequatoreae ex hypotheſi Terrae ſphaericae concluſa, quae ergo ſi fuerit Parallaxis = 60′ = 3600″, erit = 25″, ita vt vera Parallaxis aequatorea ſit 60′, 25″.

§. 35. Tales binae obſeruationes annis abhinc 27 inſtitutae ſunt a duobus obſeruatoribus, quorum alter, Abbas *la Caille*, miſſus fuerat ad Promontorium bonae ſpei, alter vero, Cel. *de la Lande*, Berolinum, quoniam haec duo loca propemodum ſub eodem Meridiano ſita credebantur, cum tamen deinceps notabilis differentia fuerit deprehenſa; vnde neceſſe erat, ambas obſeruationes per multas ambages ad eundem Meridianum reducere. Tandem vero, peractis obſeruationibus, ingenti labore concluſionem inde deduxerunt, dum ſcilicet chordam, a Berolino intra Terram ad Caput bonae ſpei ductam, in computum traxerunt, cum tamen noſtra methodo idem negotium multo facilius confici potuiſſet.

Problema III.

Si locus Lunae geocentricus ad datum tempus, quo Luna per Meridianum dati loci tranſire debet, fuerit cognitus, vna cum Parallaxi aequatorea pro eodem tempore, inuenire eius altitudinem apparentem ſuper Horizonte loci dati.

Solu-

Solutio.

§. 36. Quia locus Lunae geocentricus cognitus aſſumitur, nota erit eius diſtantia a vertice obſeruatoris V. Ponatur ergo arcus $V\Sigma = g$, latitudo vero loci ſit $= \Phi$, vnde ex noſtra Tabula definiatur zenith Z, eritque $VZ = \omega = \delta$ ſin. 2Φ. Porro quia etiam Parallaxis aequatorea *ae* datur, ex ea ex poſteriori Tabula excerpatur Parallaxis horizontalis π, quae ex formulis noſtris generalibus eſt $\pi = ae\,(1 - \delta\,\text{ſin.}\,\Phi^2)$.

§. 37. Nunc recurramus ad Problema praeliminare ſecundum, vbi arcus $Z\Sigma$ litera η indicatur; erit ergo $\eta = V\Sigma - VZ = g - \omega$. Quodſi nunc S deſignet locum centri Lunae apparentem, ibi oſtendimus, eſſe

$$\Sigma S = \pi\,\text{ſin.}\,(g-\omega) + \tfrac{1}{2}\pi\pi\,\text{ſin.}\,2\,(g-\omega).$$

Computata ergo hac formula innoteſcet interuallum $S\Sigma$, eritque idcirco diſtantia loci apparentis S a vertice V $= g + \Sigma S$, vbi ergo interuallum $S\Sigma$ eſt effectus Parallaxeos.

§. 38. Quodſi Terram tanquam ſphaericam ſpectemus, quia tum puncta V et Z conueniunt, erit in hac Hypotheſi

$$S\Sigma = \pi\,\text{ſin.}\,g + \tfrac{1}{2}\pi\pi\,\text{ſin.}\,2\,g,$$

vnde facile error commiſſus definiri poteſt. Cum enim ſit

$$\text{ſin.}\,(g-\omega) = \text{ſin.}\,g - \omega\,\text{coſ.}\,g \text{ et}$$
$$\text{ſin.}\,2\,(g-\omega) = \text{ſin.}\,2\,g - 2\,\omega\,\text{coſ.}\,2\,g,$$

diſcrimen inter haec duo loca erit

 $\pi\omega$

$\pi\,\omega\,\text{coſ.}\,g + \pi\,\pi\,\omega\,\text{coſ.}\,2\,g$

Hac ſcilicet quantitate verus valor ipſius $S\,\Sigma$ minor erit quam in Hypotheſi Terrae ſphaericae.

§. 39. Quo hoc diſcrimen clarius pateat, ſumamus $\Phi = 45^\circ$, ita vt ſit $\omega = 17', 11'' = \frac{1}{200}$; deinde ſit Parallaxis aequatorea $= 61'$, vnde pro 45° gradibus ſubtrahi debent $9'$, ita vt Parallaxis horizontalis ſit $\pi = 60', 51''$. Error igitur erit

$$\frac{\pi}{200}\,\text{coſ.}\,18^\circ + \frac{\pi\pi}{200}\,\text{coſ.}\,36^\circ,$$

ſumto ſcilicet $g = 18^\circ$. Vbi in poſteriore termino loco alterius π ſcribi debet fractio $\frac{1}{56}$, ſicque error erit

$$3651''\left(\frac{\text{coſ.}\,18^\circ}{200} + \frac{\text{coſ.}\,36^\circ}{11300}\right) = 3651.\ 0,00483.$$

conſequenter error penitus euolutus erit $= 18''$, qui in calculo ſatis eſt notabilis, atque eo magis obſeruari meretur, quod non ceſſat, etiamſi Luna proxime ad verticem vel zenith accedat.

Problema IV.

Si centrum Lunae obſeruetur in ipſo Horizonte ſub data altitudine Poli, ac pro eo tempore detur Lunae Parallaxis aequatorea, inueſtigare locum Lunae geocentricum.

Tab. IX. Fig. 7. §. 40. Quando hic de locis Lunae obſeruatis ſermo eſt, ſemper ſupponimus, eam iam refractione eſſe purgatam, quod tam de praecedentibus quam de ſequentibus probe eſt tenendum. Sit iam V vertex obſeruatoris, cuius latitudo ſit $= \Phi$; tum circulus A V B

referat

referat Meridianum et A S B Horizontem, in quo centrum Lunae obſeruatum ſit in S, eritque arcus V S quadrans circuli, ita vt ſit $f = 90°$; praeterea vero ſit arcus in Horizonte A S ſiue angulus A V S $= a$. Iam pro latitudine loci Φ ex noſtra Tabula excerpatur interuallum V Z $= \omega$, quod eſt δ ſin. 2 Φ, et poſita Parallaxi aequatorea $= ae$, inde ex poſteriore tabula colligatur Parallaxis pro loco propoſito, quae ſit $= \pi$, ita vt ſit

$$\pi = ae\,(1 - \delta\ \text{ſin.}\ \Phi^2).$$

Iam ex puncto Z ducatur arcus Z S, quem ſecundum Problema praeliminare prius ſtatuamus Z S $= \zeta$, ad quem inueniendum ex Z ad V S ducatur arculus perpendicularis Z u, et quia triangulum V Z u eſt minimum, erit

$$V\,u = \omega\ \text{coſ.}\ a \quad \text{et} \quad Z\,u = \omega\ \text{ſin.}\ a,$$

atque euidens eſt fore

$$\zeta = S\,u = 90° - \omega\ \text{coſ.}\ a.$$

Hinc ergo locus Lunae geocentricus reperietur in Σ, ita vt ſit S $\Sigma = \pi$ ſin. $\zeta = \pi$. Hic igitur notandum eſt, punctum Σ non in circulum verticalem V S ſed in arcum Z S cadere.

§. 41. Sin autem Terra eſſet ſphaerica, punctum Σ vtique caderet in ipſam verticalem V S, ad altitudinem S $\sigma = \pi$, ita vt error inde ortus ſit particula $\Sigma\,\sigma$. Hinc enim diſcrimen inter Parallaxin horizontalem et aequatoream negligere licet, quia totum negotium redit ad arculum $\Sigma\,\sigma$ definiendum. Ad hoc autem noſſe neceſſe eſt, angulum V S Z, qui eſt $= \frac{Z\,u}{\text{ſin.}\ Z\,S} = \omega$ ſin. a, quia arcus Z S a quadrante quam minime diſcrepat. Hinc ergo

 erit

erit error $\Sigma\sigma = \pi\omega$ ſin. a, qui ergo maximus euadet in medio Horizontis O, hoc eſt in cardine vel Orientis vel Occidentis, vbi igitur, ob ſin. $a = 1$, erit $\Sigma\sigma = \pi\omega$. Hoc igitur loco, ſi ſumamus $\Phi = 45°$, vbi fit $\omega = 17', 11''$, Parallaxin vero π ſtatuendo $= 61'. 30''$, ob $\omega = \frac{1}{200}$, erit error $\Sigma\sigma = \frac{3690''}{200} = 18''$.

§. 42. Ob veram igitur Figuram Terrae non ſolum Parallaxis in S aliquantillum mutatur, ſed etiam Azimuthum puncti Σ aliquantillum imminuitur, angulo ſcilicet $\Sigma V S$, qui angulus ergo erit $\frac{\Sigma\sigma}{\text{ſin. } V\Sigma}$ $\Sigma\sigma = \pi\omega$ ſin. a, cuius valor etiam, vt modo vidimus, in puncto O vsque ad 18 minuta ſecunda augeri poteſt. Vnde ſi hinc aſcenſio recta et declinatio computentur, hincque porro Longitudo et Latitudo, error ſatis notabilis reſultare poterit. Verum quia obſeruationes horizontales ſemper ob refractionem ſunt incertae, ab iſto errore nihil plane erit metuendum.

Problema V.

Tab. IX. Fig. 2. *Reperiatur nunc locus Lunae obſeruatus vbicunque in S, haecque obſeruatio facta ſit ſub eleuatione Poli Φ, quo tempore fuerit Parallaxis aequatorea $= ae$, inuenire verum Lunae locum geocentricum Σ.*

Solutio.

§. 43. Pro loco igitur obſeruato S noſſe oportet tam eius altitudinem, ſiue diſtantiam a vertice $V S = f$, quam eius Azimuth ſiue angulum $A V S = a$, ita vt quatuor

tuor res nobis ſint cognitae, nempe Φ, ae, f et a, ex quibus locum Σ quaeri oportet.

§. 44. Primo igitur ex eleuatione Poli Φ quaeratur interuallum $VZ = \omega$, ex priore tabula; deinde vero ex valore ae quaeratur Parallaxis horizontalis pro hoc loco, quae ſit $= \pi$. Iam ex Z ad arcum VS ducatur arculus normalis Zu, eritque vt ante $Vu = \omega = \cos. a$ et $Zu = \omega \sin. a$, vnde cum arcus $ZS = \zeta$ non differat ab arcu Su, erit $\zeta = f - \omega \cos. a$. Hinc ergo per Problema praeliminare prius erit interuallum

$$S\Sigma = \pi \sin. \zeta = \pi \sin. (f - \omega \cos. a),$$

quod interuallum vocemus $= \xi$, ita vt ξ nobis denotet Parallaxin $S\Sigma$.

§. 45. Cum igitur punctum Σ cadat in arcum ZS, non ſolum eius diſtantia a vertice V, ſed etiam Azimuth a immutabitur. Primo igitur quaeratur angulus ZSV, qui erit $= \frac{Zu}{\sin. \zeta} = \frac{\omega \sin. a}{\sin. \zeta}$. Tum ex puncto Σ ducatur arculus $\Sigma\sigma$ ad VS normalis, eritque

$$\Sigma\sigma = \xi \sin. \frac{\omega \sin. a}{\sin. \zeta} = \xi. \frac{\omega \sin. a}{\sin. \zeta}.$$

Hinc ergo cum ſit $V\Sigma = V\sigma$ et $S\sigma = \xi$, primo diſtantia a vertice $VS = f$ diminuetur ipſa Parallaxi $S\sigma = \xi$, ita vt iam ſit $V\Sigma = f - \xi$. Praeterea vero Azimuth a diminuetur angulo $\Sigma V\sigma$, qui eſt

$$\frac{\Sigma\sigma}{\sin. V\Sigma} = \frac{\xi \omega \sin. a}{\sin. \zeta \sin. (f - \xi)} = \frac{\xi \omega \sin. a}{\sin. f} \text{ proxime.}$$

Cognita autem puncti Σ diſtantia a vertice ΣV vna cum Azimutho $ZV\Sigma$, inde more ſolito determinabitur tam Declinatio quam Aſcenſio recta.

Pro-

Problema VI.

Si ad datum tempus ex Tabulis lunaribus computata fuerit Lunae tam longitudo quam latitudo, indeque porro Aſcenſio recta et declinatio, inuenire, vbi hoc tempore Obſeruatori, in dato Terrae loco conſtituto, centrum Lunae ſit appariturum.

Solutio.

Tab. IX. Fig. 9. §. 46. Sit loci propoſiti latitudo vt hactenus ϕ et vertex in V, ita vt ſit $PV = 90° - \phi$, tum pro loco obſeruatoris cognito, ex aſcenſione recta, vnde deducitur angulus horarius $VP\Sigma$ et diſtantia loci cogniti Σ a Polo computetur tam diſtantia a vertice $V\Sigma$, quae ſit $= g$ quam eius Azimuthum, ſeu angulus $AV\Sigma$, qui ſit $= b$.

§. 47. Iam ex latitudine ϕ quaeratur interuallum $VZ = \omega$, atque Parallaxis horizontalis pro iſto loco $= \pi$, ſiquidem ex tabulis lunaribus Parallaxis aequatorea conſtet, quo facto ex zenith Z per locum Lunae datum producatur arcus $Z\Sigma S$, ponaturque $Z\Sigma = \eta$, vti in Problemate praeliminari altero, ad quem angulum inuenien dum ex Z in $V\Sigma$ demittatur perpendiculum Zv, eritque $Vv = \omega$ coſ. b et $Zv = \omega$ ſin. b, et quia arcus ΣZ ipſi Σv aequalis reputari poteſt, erit $\eta = g - \omega$ coſ. b. Quamobrem locus apparens S reperietur in arcu $Z\Sigma$, producto ad in teruallum $S\Sigma = \pi$ ſin. $\eta + \frac{1}{2}\pi\pi$ ſin. 2η, quae expreſſio ergo dat Parallaxin $\Sigma S = \xi$.

§. 48.

§. 48. Inuento ergo puncto S primo eius diſtantia a vertice VS, tum vero Azimuth, ſiue angulus ZVS quaeri debet. Demiſſo autem ex puncto Σ in arcum VS perpendiculo $\Sigma\sigma$, erit vtique $S\sigma = S\Sigma$ et $V\sigma = V\Sigma = g$, vnde patet fore $VS = g + \xi$. Porro vero cum ſit angulus $ZSV = \frac{\omega \,\text{ſin.}\, b}{\text{ſin.}\, g}$, erit perpendiculum $\Sigma\sigma = \frac{\xi\omega \,\text{ſin.}\, b}{\text{ſin.}\, g}$, quod diuiſum per ſin. g dabit angulum ΣVS, qui erit $\xi \frac{\omega \,\text{ſin.}\, b}{\text{ſin.}\, g^2}$, huncque angulum addi oportet ad angulum b, vt obtineatur verum Azimuth loci S.

§. 49. Per ſe autem manifeſtum eſt, ſolutiones tam huius quam praecedentis Problematis tuto adhiberi non poſſe, niſi loca S et Σ ad ſatis notabilem diſtantiam a binis punctis V et Z cadant. Si enim vertici ſatis fuerint propinqua, tunc totum calculum ſecundum praecepta Trigonometriae ſphaericae inſtitui conueniet. Quin etiam totum ſpatium inter puncta V, Z, S, Σ ſatis tuto pro plano haberi poterit, ita vt tum vniuerſus calculus ad Trigonometriam planam reducatur.

§. 50. Hoc autem Problema poſtremum ſummum vſum praeſtare poterit in Eclipſibus ſolaribus computandis. Poſtquam enim ex loco geocentrico Σ inuentus fuerit locus centri Lunae apparens S, is cum loco centri Solis in coelo facile comparabitur, quod ſi pro pluribus temporis momentis durante Eclipſi repetatur, omnia Phoenomena facile, atque adeo exactiſſime, determinari poterunt, cum hoc calculo etiam verae Terrae figurae ratio habeatur, quae vulgo plerumque negligi ſolet.

Supplementum.

De Diametro Lunae apparente,

pro quouis loco, ad quoduis tempus determinando.

Tab. IX. Fig. 10. §. 51. Sit $l\,m\,l\,n$ globus Lunae, eiusque centrum in c, vnde ad centrum Terrae C ducatur recta C c, quae vocetur s, et ex C ad Lunam ducantur tangentes C l, C l. Hinc ergo ſi ſpectator in ipſo centro Terrae eſſet conſtitutus, Luna ipſi appareret ſub angulo $l\,C\,l$, quem vocemus Diametrum Lunae *centralem* et litera Δ denotemus, cuius ergo ſemiſſis ſinus erit $\frac{c\,l}{C\,c}$, ideoque ſin. $\frac{1}{2}\Delta = \frac{c\,l}{s}$. Quia autem angulus $l\,C\,l$ ſemigradum nunquam notabiliter ſuperare poteſt, erit proxime

$$\tfrac{1}{2}\Delta = \frac{c\,l}{s}, \text{ ideoque } \Delta = \frac{2\,c\,l}{s} = \frac{l\,l}{s}.$$

Vbi notetur, numeratorem $l\,l$ ſemper eſſe quantitatem conſtantem, dum denominator C $c = s$ haud mediocriter variari poteſt.

§. 52. Supra autem vidimus, poſita Parallaxi aequatorea $= ae$, eſſe $ae = \frac{1+\delta}{s}$, vbi $1+\delta$ denotat ſemidiametrum Aequatoris Terrae, ex quo manifeſtum eſt Diametrum Lunae centralem Δ ad Parallaxin aequatoream ae eſſe vt $l\,l$ ad $1+\delta$, ideoque in ratione conſtante. Hanc ob rem ſtatuamus $\Delta = \alpha\, ae$, atque ex Theoria Lunae iſtum coefficientem α definire liceret.

§. 53. Verum quia Diameter centralis non datur, videamus, quomodo ſe habeat ad Diametrum horizontalem

lem. Sit igitur L locus quicunque in ſuperficie Terrae, atque vidimus, eius diſtantiam a centro C ſemper intra limites 1 et $1 + \delta$ contineri, exiſtente $\delta = \frac{1}{275}$. Sit porro angulus $C L c$ rectus, ita vt Luna ſpectatori in L in ipſo Horizonte appareat. Quanquam enim linea horizontalis $L c$ aliquantum a poſitione normali differre poteſt, tamen inde longitudo rectae s nihil mutatur; vnde ſequitur, Diametrum Lunae horizontalem ex L viſam eſſe ad diametrum centralem ex C viſam in ratione reciproca diſtantiarum, hoc eſt vt $C c$ ad $L c$, quae ratio ab aequalitate tam parum differt, vt differentia tuto negligi queat. Cum enim diſtantia $C c = s$ reſpectu C L ſit circiter 60, erit $L c = \sqrt{60^2 - 1} = 60 - \frac{1}{120}$; hinc ergo erit $L c : C c = 1 : 1 - \frac{1}{7200}$. ſicque diameter horizontalis ſuperabit diametrum centralem Δ ſui parte 7200ma. Quare cum diameter Lunae horizontalis ſit quaſi $30' = 1800''$, iſtud augmentum tantum valebit partem quartam minuti ſecundi, quod ergo tuto omitti poterit, ita vt littera Δ nobis ſemper etiam diametrum Lunae horizontalem denotare poſſit.

§. 54. Hinc ergo intelligimus, diametrum Lunae apparentem in Horizonte prorſus non a figura Terrae pendere atque perpetuo perinde ſe habere, ac ſi Terra eſſet ſphaerica; vnde cum poſuerimus $\Delta = \alpha\, ae$, ex Ephemeridibus, vbi tam Parallaxis aequatorea quam diameter Lunae horizontalis refertur, iſte coefficiens α colligi poterit, ſcilicet valor fractionis $\frac{\Delta}{ae}$. Collatis autem ex nouiſſimis Ephemeridibus inter ſe pluribus caſibus, valor noſter, ſumto medio, tuto aſſumere licet $\alpha = 0,545$ ita vt proxime ſit $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{20} - \frac{1}{200}$.

§. 55. Cognito ergo valore litterae α, erit $\Delta = 0,545.\ ae$. Hinc facile erit pro quauis Parallaxi aequatorea *ae* diametrum Lunae horizontalem aſſignare, et cum *ae* variari poſſit a $54'$ vsque ad $62'$, tabulam ſubiungamus, quae ad ſingula ſemiminuta prima diametrum horizontalem oſtendat.

Parall. *ae*	Diam. Δ	Parall. *ae*	Diam. Δ
54′ 0″	29′ 48″	58′ 0″	31′ 37″
54 30	29 54	58 30	31 53
55 0	30 0	59 0	32 9
55 30	30 15	59 30	32 25
56 0	30 31	60 0	32 42
56 30	30 47	60 30	32 58
57 0	31 4	61 0	33 15
57 30	31 20	61 30	33 31
58 0	31 37	62 0	33 47

Tab. IX. Fig. 1. §. 56. Cognito autem Diametro Lunae horizontali Δ, cui proxime aequalis eſt vti vidimus, diameter centralis, ſiquidem tantum deficit parte quarta minuti ſecundi, ex figura, vbi C eſt centrum Terrae, L locus obſeruatoris, Z eius zenith et S locus Lunae, euidens eſt, eius diametrum apparentam, qui ſit $= D$, ſe habere ad diametrum centralem Δ in ratione reciproca diſtantiarum, hoc eſt vt CS ad LS, ita vt ſit $D = \Delta . \frac{CS}{LS}$, vnde ſequitur fore $D = \Delta . \frac{\text{ſin. } ZLS}{\text{ſin. } ZL\Sigma}$. Hinc ad Trigonometricam ſphaeri-
Fig. 3. cam reducendo erit $D = \Delta \frac{\text{ſin. } ZS}{\text{ſin. } Z\Sigma}$.

§. 57.

§. 57. Vocauimus autem arcum $ZS = \zeta$ et arcum $Z\Sigma = \eta$, atque pro data loci latitudine $= \Phi$ et Parallaxi $= \pi$ inuenimus interuallum $S\Sigma = \pi$ ſin. ζ. Hinc ergo erit

$$D = \frac{\Delta \text{ ſin. } \zeta}{\text{ſin. } (ZS - S\Sigma)} = \frac{\Delta \text{ ſin. } \zeta}{\text{ſin. } (\zeta - \pi \text{ ſin. } \zeta)}.$$

At vero eſt proxime

$$\text{ſin. } (\zeta - \pi \text{ ſin. } \zeta) = \text{ſin. } \zeta \text{ coſ. } (\pi \text{ ſin. } \zeta) - \pi \text{ coſ. } \zeta \text{ ſin. } \zeta,$$

ideoque

$$\frac{\text{ſin. } (\zeta - \pi \text{ ſin. } \zeta)}{\text{ſin. } \zeta} = \text{coſ. } (\pi \text{ ſin. } \zeta) - \pi \text{ coſ. } \zeta,$$

et quia coſ. π ſin. $\zeta = 1 - \frac{1}{2} \pi \pi$ ſin. ζ^2, vbi quidem poſtremum membrum ſatis tuto negligere liceret, habebimus

$$D = \frac{\Delta}{1 - \pi \text{ coſ. } \zeta - \frac{1}{2} \pi \pi \text{ ſin. } \zeta^2}.$$

Translato igitur denominatore in numeratorem, ob

$\frac{1}{1 - \alpha} = 1 + \alpha + \alpha\alpha$, quia hic $\alpha = \pi$ coſ. $\zeta + \frac{1}{2} \pi \pi$ ſin. ζ^2,

reperitur

$$D = \Delta (1 + \pi \text{ coſ. } \zeta + \tfrac{1}{2} \pi \pi \text{ ſin. } \zeta^2 + \pi \pi \text{ coſ. } \zeta^2), \text{ ſiue}$$

$$D = \Delta (1 + \pi \text{ coſ. } \zeta + \tfrac{1}{2} \pi \pi (1 + \text{coſ. } \zeta^2)),$$

quod poſtremum membrum num poſſit omitti ſine errore ſenſibili videamus. Sumamus igitur $\pi = \frac{1}{60}$ et $\zeta = 0$, fietque $\frac{1}{2} \pi \pi (1 + \text{coſ. } \zeta^2) = \frac{1}{3600}$, et cum Δ ſit circiter $32'$, eius pars 3600ma facit circiter ſemi-minutum ſecundum, vnde hoc membrum tuto reiicere licet.

§. 58. Ex Diametro igitur horizontali Δ Diameter apparens D erit $D = \Delta (1 + \pi \text{ coſ. } \zeta)$. Quoniam ergo in determinatione Parallaxeos ſupra vbique arcum

$ZS = \zeta$ aſſignauimus, facile erit omnibus caſibus Diametrum apparentem D determinare ope ſequentis regulae:

Primo tenendum eſt, Diametrum apparentem non a vertice Obſeruatoris V, *ſed ab eius zenith* Z *pendere; tum vero, cognitam eſſe debere Parallaxin Lunae horizontalem* π *vna cum Diametro horizontali* Δ. *Hincque, ſi diſtantia loci Lunae apparentis* S *a zenith* Z, *fuerit* $ZS = \zeta$, *erit Diameter apparens hoc loco* $D = \Delta(1 + \pi \operatorname{coſ.} \zeta)$; *vnde patet in ipſo zenith, vbi* $\zeta = 0$, *diametrum apparentem fore* $D = \Delta(1 + \pi)$, *ſicque non in vertice ſed in zenith Diameter Lunae erit maximus.*

DE

DE AESTIMANDO TEMPORE, QVO DIAMETER SOLIS PER CIRCVLVM QVENDAM, SIVE VERTICALEM, SEV HORIZONTI PARALLELVM, TRANSIRE VIDETVR.

Auctore

A. J. LEXELL.

§. 1.

Regulae quae hucusque ab Aſtronomis traditae ſunt, pro aeſtimando tempore, quo diameter Solis per filum quoddam ſiue verticale, ſiue horizontale, in Quadrante vel alio Inſtrumento aſtronomico, tranſire videtur, licet in caſibus plerumque obuiis concluſiones ſatis exactas ſuppeditent; examine tamen exactius inſtituto, facile deprehendetur, eas a rigore geometrico adeo abludere, vt nonnunquam ad concluſiones enormiter a vero aberrantes perducere queant. Vt igitur hac de quaeſtione omni in caſu iudicium certum et nulli dubio obnoxium formari poſſit, disquiſitionem hanc omni rigore inſtituere ſuſcepi, quo ipſo euidens fiet, quid de formulis hucusque adhibitis, ſtatuendum ſit.

§. 2.

§. 2. Supponamus igitur primum diſquirendum eſſe de tempore, quo Diameter Solis arcum verticalem ZON percurrit, et ſtatuamus centrum Solis tempore, quo hunc arcum tranſit, verſari in O, dum vero imago Solis iſtum arcum tangit, centrum Solis reperiri in Q, adeo vt ducto arcu circuli maximi NQ, normali ad arcum ZON, NQ aequetur ſemidiametro Solis. Tum vero ſi ponatur P polus Aequatoris, et Z zenith loci, atque iungantur PZ, PO, PQ, OQ; facile patet quaeſtionem propoſitam nunc eo reduci, vt in quadrilatero PONQ ex datis arcubus PO, PQ, NQ et angulis PON, QNO, quorum hic rectus eſt, determinetur angulus OPQ; cognito enim iſto angulo, tempus innoteſcet, quo centrum Solis a puncto Q ad punctum O peruenerit. Iam in formulis hucusque adhibitis Aſtronomi triangulum QON vt rectilineum tractare conſueuerunt, vnde deducitur $QO = \frac{NQ}{ſin.\,QON}$. Porro ſi ſupponatur $PQ = PO$, et arcum QO, deſcriptum polo P, interuallo PO, cum linea QO coincidere, erit vti ex ſphaericis conſtat, $OPQ = \frac{QO}{ſin.\,PO}$, vnde ſiet

Tab. X. Fig. 1.

$$\text{ang. } OPQ = \frac{NQ}{ſin.\,PO.\,ſin.\,QON},$$

vbi pro ſin. QON adhibere ſolent coſ. ZOP, ſuppoſito nimirum quod ang. POQ ſit rectus.

§. 3. Cum facile perſpiciatur in hoc ratiocinio varia ſupponi, quae non quidem exacte vera haberi queant, videamus qua ratione ad aequationem omni rigore veram, pro determinando valore anguli OPQ peruenire liceat. Ponamus igitur arcus PO, PQ, NQ, reſpectiue indigitari per literas a, b, c, angulos autem OPQ, ZOP $= 180 - PON$, per α, β, exiſtente $QNO = 90°$. Cum igitur

igitur ſit in Triangulo Q O N, ſin. N Q = ſin. Q O. ſin. N O Q, ſi facilitatis gratia exprimatur Q O per e, P O Q per θ et Q O N per ε, erit

$$\mathrm{ſin.}\, c = \mathrm{ſin.}\, e.\, \mathrm{ſin.}\, \varepsilon = \mathrm{ſin.}\, e.\, \mathrm{ſin.}\, (180^\circ - \theta - \beta) =$$
$$\mathrm{ſin.}\, e.\, \mathrm{ſin.}\, (\theta + \beta) = \mathrm{ſin.}\, e\, (\mathrm{ſin.}\, \theta.\, \mathrm{coſ.}\, \beta + \mathrm{coſ.}\, \theta.\, \mathrm{ſin.}\, \beta) =$$
$$\mathrm{ſin.}\, e.\, \mathrm{ſin.}\, \theta\, (\mathrm{coſ.}\, \beta + \mathrm{cot.}\, \theta.\, \mathrm{ſin.}\, \beta).$$

Atqui in Triangulo P O Q eſt, ſin. Q O. ſin. P O Q = ſin. P Q. ſin. O P Q, ſeu ſin. e. ſin. θ = ſin. b. ſin. α, tumque

$$\mathrm{cot.}\, \theta = \frac{\mathrm{cot.}\, b.\, \mathrm{ſin.}\, a - \mathrm{coſ.}\, a.\, \mathrm{coſ.}\, \alpha}{\mathrm{ſin.}\, \alpha}.$$

His igitur valoribus ſubſtitutis, prodibit ſequens aequatio:

$$\mathrm{ſin.}\, c = \mathrm{ſin.}\, b.\, (\mathrm{coſ.}\, \beta.\, \mathrm{ſin.}\, \alpha. + \mathrm{ſin.}\, \beta\ \mathrm{cot.}\, b.\, \mathrm{ſin.}\, a - \mathrm{ſin.}\, \beta.\, \mathrm{coſ.}\, \alpha.\, \mathrm{coſ.}\, a),$$

ideoque

$$\frac{\mathrm{ſin.}\, c}{\mathrm{ſin.}\, b} - \mathrm{cot.}\, b.\, \mathrm{ſin.}\, a.\, \mathrm{ſin.}\, \beta = \mathrm{ſin.}\, \alpha.\, \mathrm{coſ.}\, \beta. - \mathrm{coſ.}\, \alpha.\, \mathrm{ſin.}\, \beta.\, \mathrm{coſ.}\, a.$$

Quare ſi ponatur tang. β. coſ. a = tang. δ, fiet

$$\frac{\mathrm{ſin.}\, c - \mathrm{coſ.}\, b.\, \mathrm{ſin.}\, a.\, \mathrm{ſin.}\, \beta}{\mathrm{ſin.}\, b.\, \mathrm{coſ.}\, \beta.} = \mathrm{ſin.}\, \alpha - \mathrm{coſ.}\, \alpha.\, \mathrm{tang.}\, \delta,$$

hincque

$$\frac{\mathrm{coſ.}\, \delta\, (\mathrm{ſin.}\, c - \mathrm{coſ.}\, b.\, \mathrm{ſin.}\, a.\, \mathrm{ſin.}\, \beta)}{\mathrm{ſin.}\, b.\, \mathrm{coſ.}\, \beta.} = \mathrm{ſin.}\, (\alpha - \delta),$$

vnde ob cognitos valores ipſorum a, b, c, β, δ, innoteſcet angulus α.

§. 4. Pro caſu ſpeciali, quo $b = a$, formula aliquanto fiet concinnior; erit enim

$$\frac{\mathrm{ſin.}\, c}{\mathrm{ſin.}\, b} - \mathrm{ſin.}\, \beta.\, \mathrm{coſ.}\, b = \mathrm{ſin.}\, \alpha.\, \mathrm{coſ.}\, \beta - \mathrm{coſ.}\, \alpha.\, \mathrm{ſin.}\, \beta.\, \mathrm{coſ.}\, b,$$

vbi quidem, ſi angulus α valde ſit exiguus, ita vt ſtatui queat coſ. $\alpha = 1$, fiet

$$\frac{\mathrm{ſin.}\, c}{\mathrm{ſin.}\, b} = \mathrm{ſin.}\, \alpha.\, \mathrm{coſ.}\, \beta, \quad \text{hinc}\ \mathrm{ſin.}\, \alpha = \frac{\mathrm{ſin.}\, c}{\mathrm{ſin.}\, b.\, \mathrm{coſ.}\, \beta},$$

quae formula cum ſuperius allata congruit, ſi loco ſin. c,

ſin. α, adhibeantur ipſi arcus c, α. Caeterum pro hoc quoque caſu valorem exactiorem ipſius α ſequenti approximatione obtinere licebit. Quia eſt

$$\frac{\text{ſin.}\, c}{\text{ſin.}\, b} = \text{ſin.}\, \alpha.\, \text{coſ.}\, \beta + (1 - \text{coſ.}\, \alpha)\, \text{ſin.}\, \beta.\, \text{coſ.}\, b,$$

ob $1 - \text{coſ.}\, \alpha = 2\, \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}\alpha^2$ fiet

$$\frac{\text{ſin.}\, c}{\text{ſin.}\, b} = 2\, \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}\alpha\, (\text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}\alpha.\, \text{coſ.}\, \beta + \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}\alpha.\, \text{ſin.}\, \beta.\, \text{coſ.}\, b.),$$

vbi ſi iam ponatur $\text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}\alpha = 1$, et terminum $\text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}\alpha.\, \text{ſin.}\, \beta.\, \text{coſ.}\, b$ prae $\text{coſ.}\, \beta$ euaneſcere, fiet $2\, \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\text{ſin.}\, c}{\text{ſin.}\, b.\, \text{coſ.}\, \beta}$ proxime; tum vero exactius erit:

$$\frac{\text{ſin.}\, c}{\text{ſin.}\, b} = \text{ſin.}\, \alpha.\, \text{coſ.}\, \beta + 2\, \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}\alpha^2\, \text{ſin.}\, \beta.\, \text{coſ.}\, b =$$

$$\text{ſin.}\, \alpha.\, \text{coſ.}\, \beta + \frac{\text{ſin.}\, c^2.\, \text{coſ.}\, b.\, \text{ſin.}\, \beta}{2\, \text{ſin.}\, b^2\, \text{coſ.}\, \beta^2},$$ ideoque

$$\text{ſin.}\, \alpha = \frac{\text{ſin.}\, c}{\text{ſin.}\, b.\, \text{coſ.}\, \beta} - \frac{\text{ſin.}\, c^2.\, \text{coſ.}\, b.\, \text{ſin.}\, \beta}{2\, \text{ſin.}\, b^2\, \text{coſ.}\, \beta^3}.$$

§. 5. Caeterum cum multo faciliori et concinniori ratione aequatio pro determinando angulo α obtineri queat, eam heic proponere aequum eſt. Ducantur ſcilicet ex punctis O, N normales ad arcum Z O N, qui ſibi invicem occurrant in Π, ita vt ſit Π O = Π N = 90°; tumque iungatur arcus P Π, qui ſi exprimatur per e, angulo O P Π per ζ indigitato, habebimus in triangulo O P Π,

$$0 = \text{coſ.}\, O\Pi = \text{coſ.}\, OP.\, \text{coſ.}\, P\Pi + \text{ſin.}\, OP.\, \text{ſin.}\, P\Pi.\, \text{coſ.}\, OP\Pi,$$

et in triangulo Q P Π,

$$\text{ſin.}\, NQ = \text{coſ.}\, \Pi Q = \text{coſ.}\, PQ.\, \text{coſ.}\, P\Pi + \text{ſin.}\, PQ.\, \text{ſin.}\, P\Pi.\, \text{coſ.}\, QP\Pi,$$

ſiue $0 = \text{coſ.}\, a.\, \text{coſ.}\, e + \text{ſin.}\, a.\, \text{ſin.}\, e.\, \text{coſ.}\, \zeta$, et

$$\text{ſin.}\, c = \text{coſ.}\, b.\, \text{coſ.}\, e + \text{ſin.}\, b.\, \text{ſin.}\, e.\, \text{coſ.}\, (\zeta - \alpha).$$

In poſteriori aequatione, ſubſtituto pro $\text{coſ.}\, \zeta$ eius valore $= -\text{cot.}\, a.\, \text{cot.}\, e$, fiet

$$\text{ſin.}\, c = \text{coſ.}\, e.\, \text{coſ.}\, b + \text{ſin.}\, e.\, \text{ſin.}\, b.\, \text{ſin.}\, \zeta.\, \text{ſin.}\, \alpha - \text{coſ.}\, \alpha.\, \text{ſin.}\, b\, \text{cot.}\, a.\, \text{coſ.}\, e,$$

hinc

hinc

$$\text{ſin. } c - \text{coſ. } e \text{ coſ. } b = \text{ſin. } b \text{ ſin. } e \text{ ſin. } \zeta \text{ ſin. } \alpha$$
$$- \text{coſ. } \alpha \text{ ſin. } b \text{ cot. } a \text{ coſ. } e.$$

Quare cum ſit in triangulo O P Π, coſ. e = ſin. a. ſin. β, ob coſ. P Π = ſin. P O. coſ. P O Π, et ſin. e. ſin. ζ = coſ. β, ob ſin. P Π. ſin. Π P O = ſin. P O Π, tumque cot. $e = -\frac{\text{coſ. } a}{\text{coſ. } \beta}$, fiet his valoribus ſuffectis

$$\text{ſin. } c - \text{ſin. } a \text{ coſ. } b \text{ ſin. } \beta = \text{ſin. } \alpha. \text{ ſin. } b \text{ coſ. } \beta$$
$$- \text{coſ. } \alpha \text{ ſin. } b. \text{ coſ. } a \text{ ſin. } \beta.$$

quae aequatio prorſus eadem eſt ac illa, ad quam in §. 3. pertigimus.

§. 6. **Ex** ſolutione modo allata iam perſpicitur, quaeſtionem aeque facile reſolui, quemcunque ſitum habuerit arcus Z O N, nec prorſus requiri, vt hic arcus ad circulum maximum pertineat. Sic nimirum ſupponatur M O N eſſe arcum cuiuscunque circuli minoris in ſuperficie ſphaerae coeleſtis deſcripti, eiusque Polum eſſe Π, Polo Aequatoris in P exiſtente, centrum vero Solis, tranſeuntis per arcum M O N, fuiſſe in O, et ante tranſitum, dum imago Solis arcum O N tangere videbatur, centrum iſtud fuiſſe in Q; vnde ductis arcubus circulorum maximorum Π O, Π Q, erunt hi arcus normales ad M O N, et Q N aequabitur ſemidiametro Solis. Porro concipiatur per O ductum eſſe arcum circuli maximi R O, qui iſtum M O N ibidem tangit; tumque iungantur P O, P Q arculus circulorum maximorum. Nunc ſi arcus P O, P Q, P Π, Q N, Π O, exprimantur per a, b, e, c, f, et anguli R O P, O P Π, O P Q per β, ζ, α, erit ex triangulis O P Π, Q P Π, Tab. X. Fig. 2.

 coſ.

$$\text{coſ.}\,\Pi O = \text{coſ.}\,PO.\,\text{coſ.}\,P\Pi + \text{ſin.}\,PO\,\text{ſin.}\,P\Pi.\,\text{coſ.}\,O\Pi P$$

$$\text{coſ.}\,\Pi Q = \text{coſ.}\,PQ.\,\text{coſ.}\,P\Pi + \text{ſin.}\,PQ\,\text{ſin.}\,P\Pi.\,\text{coſ.}\,QP\Pi.$$

ſeu introductis litteris:

$$\text{coſ.}\,f = \quad \text{coſ.}\,a.\,\text{coſ.}\,e + \text{ſin.}\,a.\,\text{ſin.}\,e\,\text{coſ.}\,\zeta.$$

$$\text{coſ.}\,(f-c) = \text{coſ.}\,b.\,\text{coſ.}\,e + \text{ſin.}\,b.\,\text{ſin.}\,e.\,\text{coſ.}\,(\zeta - \alpha)$$

$$= \text{coſ.}\,b.\,\text{coſ.}\,e + \text{ſin.}\,b.\,\text{ſin.}\,e\,(\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\alpha + \text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\alpha).$$

In poſteriori aequatione pro coſ. ζ ſubſtituatur eius valor $\frac{\text{coſ.}\,f - \text{coſ.}\,a.\,\text{coſ.}\,e}{\text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,e}$, fiet $\text{coſ.}\,(f-c) - \text{coſ.}\,b\,\text{coſ.}\,e$

$$= \text{ſin.}\,b.\,\text{ſin.}\,e.\,\text{ſin.}\,\zeta.\,\text{ſin.}\,\alpha + \frac{\text{coſ.}\,\alpha.\,\text{ſin.}\,b}{\text{ſin.}\,a.}(\text{coſ.}\,f - \text{coſ.}\,a.\,\text{coſ.}\,e),$$

vnde ſi iterum pro coſ. e ſubſtituatur

$$\text{coſ.}\,a.\,\text{coſ.}\,f + \text{ſin.}\,a.\,\text{ſin.}\,f\,\text{ſin.}\,\beta,$$

ob $PO\Pi = 90° - ROP$, tumque $\text{ſin.}\,e.\,\text{ſin.}\,\zeta = \text{ſin.}\,f.\,\text{coſ.}\,\beta$, haec prodibit aequatio:

$$\text{coſ.}\,(f-c) - \text{coſ.}\,b(\text{coſ.}\,a\,\text{coſ.}\,f. + \text{ſin}\,a\,\text{ſin.}\,f\,\text{ſin.}\,\beta) = \text{ſin.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,b\,\text{ſin.}\,f.\,\text{coſ.}\,\beta$$

$$+ \frac{\text{coſ.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,b}{\text{ſin.}\,a}(\text{coſ.}\,f - \text{coſ.}\,a\,(\text{coſ.}\,a.\,\text{coſ.}\,f + \text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,f\,\text{ſin.}\,\beta))$$

$$= \text{ſin.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,b.\,\text{ſin.}\,f.\,\text{coſ.}\,\beta$$

$$+ \frac{\text{coſ.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,b}{\text{ſin.}\,a}(\text{ſin.}\,a^2\,\text{coſ.}\,f - \text{ſin.}\,a\,\text{coſ.}\,a\,\text{ſin.}\,f\,\text{ſin.}\,\beta)$$

$$= \text{ſin.}\,\alpha.\,\text{ſin.}\,b.\,\text{ſin.}\,f.\,\text{coſ.}\,\beta$$

$$+ \text{coſ.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,b\,(\text{ſin.}\,a\,\text{coſ.}\,f - \text{coſ.}\,a\,\text{ſin.}\,f.\,\text{ſin.}\,\beta)$$

hinc

$$\frac{\text{coſ.}\,(f-c) - \text{coſ.}\,b\,(\text{coſ.}\,a.\,\text{coſ.}\,f + \text{ſin.}\,a.\,\text{ſin.}\,f\,\text{ſin.}\,\beta)}{\text{ſin.}\,b.\,\text{ſin.}\,f\,\text{coſ.}\,\beta}$$

$$= \text{ſin.}\,\alpha + \frac{\text{coſ.}\,\alpha}{\text{ſin.}\,f.\,\text{coſ.}\,\beta}(\text{ſin.}\,a\,\text{coſ.}\,f - \text{coſ.}\,a\,\text{ſin.}\,f\,\text{ſin.}\,\beta.)$$

§. 7. Si formulas, tam in § praeced. quam 5to allatas, attente conſideremus, facile perſpicietur, earum computum facillimo modo iniri, ſi in Triangulo ΠPO, ex datis lateribus PO, $O\Pi$ et angulo $PO\Pi$, quaerantur

tur latus P Π et angul. O P Π; tum enim ſiet pro §. 5,

$$\text{coſ.}\,(\zeta-\alpha)=\frac{\text{ſin.}\,c-\text{coſ.}\,b.\,\text{coſ.}\,e}{\text{ſin.}\,b.\,\text{ſin.}\,e}$$

et pro § praecedente,

$$\text{coſ.}\,(\zeta-\alpha)=\frac{\text{coſ.}\,(f-c)-\text{coſ.}\,b.\,\text{coſ.}\,e}{\text{ſin.}\,b\,\text{ſin.}\,e}.$$

Pro priori enim caſu, ad conſtructionem problematis pertinebit primum, vt quaeratur $\text{cot.}\,\zeta=-\text{tang.}\,\beta.\,\text{coſ.}\,a$, tum enim erit:

$$\frac{\text{ſin.}\,\zeta\,(\text{ſin.}\,c-\text{ſin.}\,a.\,\text{coſ.}\,b.\,\text{ſin.}\,\beta)}{\text{ſin.}\,b.\,\text{coſ.}\,\beta}=\text{coſ.}\,(\zeta-\alpha),$$

deinde vero ob

$$\frac{\text{ſin.}\,\zeta}{\text{coſ.}\,\beta}=\frac{1}{\text{ſin.}\,e}\ \text{et ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,\beta=\text{coſ.}\,e,$$

prodibit formula propoſita. Pro poſteriori caſu conſtructio reducitur ad quaerendum angulum ζ ope formulae

$$\text{cot.}\,\zeta=\frac{\text{coſ.}\,f.\,\text{ſin.}\,a.-\text{ſin.}\,f.\,\text{coſ.}\,a.\,\text{ſin.}\,\beta}{\text{ſin.}\,f.\,\text{coſ.}\,\beta},\ \text{et}$$

$$\text{coſ.}\,e=\text{coſ}\,a.\,\text{coſ.}\,f+\text{ſin.}\,a.\,\text{ſin.}\,f.\,\text{ſin.}\,\beta.$$

§. 8. Si in formula §. 6. allata, ponatur $b=a$, fiet

$$\frac{\text{coſ.}\,(f-c)-\text{coſ.}\,a^2\,\text{coſ}\,f.-\text{ſin.}\,a.\,\text{coſ.}\,a\,\text{ſin.}\,f.\,\text{ſin.}\,\beta}{\text{ſin.}\,a.\,\text{ſin.}\,f.\,\text{coſ.}\,\beta}$$

$$=\text{ſin.}\,\alpha+\frac{\text{coſ.}\,\alpha}{\text{ſin.}\,f.\,\text{coſ.}\,\beta}(\text{ſin.}\,a.\,\text{coſ.}\,f-\text{coſ.}\,\alpha.\,\text{ſin.}\,f.\,\text{ſin.}\,\beta),$$

et ſi ponatur $\text{coſ.}\,\alpha=1$, quod fiet, vbi angulus α eſt valde paruus, obtinebitur,

$$\frac{\text{coſ.}\,(f-c)\,\text{coſ.}\,f}{\text{ſin.}\,a.\,\text{ſin.}\,f.\,\text{coſ.}\,\beta}=\text{ſin.}\,\alpha,\ \text{ſeu}$$

$$\text{ſin.}\,\alpha.=\frac{2\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,c.\,\text{ſin.}\,(f-\tfrac{1}{2}\,c)}{\text{ſin.}\,a.\,\text{ſin.}\,f.\,\text{coſ.}\,\beta},$$

quae formula, ſi ponatur $f=90°$, prorſus congruit cum valore approximato, $\text{ſin.}\,\alpha=\frac{\text{ſin.}\,c}{\text{ſin.}\,a.\,\text{coſ.}\,\beta}$. Caeterum cum ſit

 coſ.

$$\frac{\text{coſ.}(f-c)-\text{coſ.}f}{\text{ſin.}\,a.\,\text{ſin.}f.\,\text{coſ.}\beta} = \text{ſin.}\,\alpha - \frac{(1-\text{coſ.}\,\alpha)}{\text{ſin.}f.\,\text{coſ.}\beta}\,(\text{ſin.}\,a.\,\text{coſ.}f - \text{coſ.}\,a\,\text{ſin.}f\,\text{ſin.}\beta)$$

$$= 2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\alpha\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\alpha - \frac{\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\alpha}{\text{ſin.}f.\,\text{coſ.}\beta}\,(\text{ſin.}\,a.\,\text{coſ.}f - \text{coſ.}\,a\,\text{ſin.}f.\,\text{ſin.}\beta),$$

ſi primum ſupponatur

$$2\,\text{ſin.}^2\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\text{coſ.}(f-c)-\text{coſ.}f}{\text{ſin.}\,a.\,\text{ſin.}f.\,\text{coſ.}\beta},\ \text{ſeu}$$

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c\,\text{ſin.}(f-\tfrac{1}{2}c)}{\text{ſin.}\,a.\,\text{ſin.}f.\,\text{coſ.}\beta},$$

adhibito hoc valore pro $1-\text{coſ.}\,\alpha$, valorem propiorem pro $\text{ſin.}\,\alpha$ obtinebimus, qui tamen prolixior eſt, quam eius vt vſum in calculis aſtronomicis facere liceat.

§. 9. Hucusque contemplati quidem non ſumus niſi illud tempus, quo centrum Solis a puncto Q ad O peruenit, id eſt, quod elabitur inter momentum, quo margo Solis arcum M O N tangere videtur, et illud quo centrum Solis per hunc arcum tranſit. Nunc autem ſimul ratio habenda eſt temporis, quod inter tranſitum centri per arcum modo dictum et contactum imaginis ab altera parte huius arcus elabitur; neque enim exiſtimandum eſt, interualla haec temporum praeciſe aequalia eſſe. Scilicet ſi centrum Solis tempore ſecundi contactus verſetur in Q′, puncto contactus exiſtente N′, ſi iungantur P N′ Q′, Π N′, iamque exprimatur P Q′ per b', nunc disquirendum de formula, quae valorem anguli O P N′ $= \alpha'$ exhibet. Caeterum facili adhibita attentione perſpicietur, aequationem quaeſitam huiusmodi eſſe formae:

$$\frac{\text{coſ.}(f+c)-\text{coſ.}\,b'(\text{coſ.}\,a.\,\text{coſ.}f+\text{ſin.}\,a.\,\text{ſin.}f.\,\text{ſin.}\beta)}{\text{ſin.}\,c.\,\text{ſin.}f.\,\text{coſ.}\beta}$$

$$= -\text{ſin.}\,a' + \frac{\text{coſ.}\,a'}{\text{ſin.}f.\,\text{coſ.}\beta}(\text{ſin.}\,a.\,\text{coſ.}f - \text{coſ.}\,a.\,\text{ſin.}f.\,\text{ſin.}\beta).$$

Pro

Pro illis igitur caſibus vbi anguli α, α' ſunt valde parui, ideoque etiam parum inter ſe differunt, ita vt ſupponere liceat $\cos. \alpha = \cos. \alpha'$, et $\cos. \frac{1}{2}(\alpha - \alpha') = 1$, ſi inſuper ſupponatur facilitatis gratia $a = b = b'$, prodibit,

$$\sin. \alpha + \sin. \alpha' = \frac{\cos.(f-c) - \cos.(f+c)}{\sin. a. \sin. f. \cos. \beta},$$

ideoque

$$\sin. \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha') = \frac{\sin. c. \sin. f}{\sin. a. \sin. f. \cos. \beta} = \frac{\sin. c}{\sin. a. \cos. \beta},$$

ita vt nunc quidem liquido pateſcat, valorem approximatum ipſius $\frac{1}{2}(\alpha + \alpha')$ per iſtam formulam:

$$\sin. \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha') \frac{\sin. c}{\sin. a. \cos. \beta},$$

ſeu etiam per hanc: $\alpha + \alpha' = \frac{2c}{\sin. a. \cos. \beta}$ exprimi, denotante c ſemidiametrum Solis.

§. 10. Caeterum haec formula multo facilius deducitur ex iſtis binis aequationibus principalibus:

$$\cos.(f-c) = \cos. a. \cos. e + \sin. a. \sin. e \cos. (\zeta - \alpha)$$
$$\cos.(f+c) = \cos. a. \cos. e + \sin. a. \sin. e \cos. (\zeta + \alpha')$$

vnde habetur

$$\frac{\cos.(f-c) - \cos.(f+c)}{\sin. a. \sin. e} = \cos. (\zeta - \alpha) - \cos. (\zeta + \alpha'),$$

ideoque

$$\frac{\sin. c. \sin. f}{\sin. a. \sin. e} = \sin. \left(\frac{\alpha + \alpha'}{2}\right) \sin. \left(\zeta + \frac{\alpha' - \alpha}{2}\right),$$

vbi ſi ponatur $\alpha - \alpha' = 0$, fiet

$$\sin. \left(\frac{\alpha + \alpha'}{2}\right) = \frac{\sin. c \sin. f}{\sin. a \sin. e \sin. \zeta} = \frac{\sin. c}{\sin. a. \cos. \beta}, \text{ ob}$$
$$\sin. f \cos. \beta = \sin. e. \sin. \zeta.$$

Tum vero ſimul patet, ſi innoteſcat $\frac{\alpha - \alpha'}{2}$, exacte fore

$$\sin. \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha') = \frac{\sin. c. \sin. f}{\sin. a. \sin. e. \sin. \left(\zeta + \frac{\alpha' - \alpha}{2}\right)}$$

= ſin.

$$= \frac{\text{ſin.}\, c\ \text{ſin.}\, \zeta}{\text{ſin.}\, c.\ \text{coſ.}\, \beta.\ \text{ſin.}\, (\zeta + \frac{\alpha' - \alpha}{2})},$$

vbi tamen, vt in ſuperioribus, ſupponitur $b = b' = a$. Praeterea quia eſt

$$\text{ſin.}\, (\zeta + \tfrac{\alpha' - \alpha}{2}) = \text{ſin.}\, \zeta.\ \text{coſ.}\, (\tfrac{\alpha' - \alpha}{2}) + \text{coſ.}\, \zeta\ \text{ſin.}\, (\tfrac{\alpha' - \alpha}{2})]$$
$$= \text{ſin.}\, \zeta + \text{coſ.}\, \zeta.\ \text{ſin.}\, (\tfrac{\alpha' - \alpha}{2}),$$

hinc

$$\frac{\text{ſin.}\, (\zeta + \frac{\alpha' - \alpha}{2})}{\text{ſin.}\, \zeta} = 1 + \text{cot.}\, \zeta\ \text{ſin.}\, (\tfrac{\alpha' - \alpha}{2}),$$

adeoque, ob $\text{ſin.}\, (\frac{\alpha' - \alpha}{2})$ valde paruum, loco

$$\frac{1}{1 + \text{cot.}\, \zeta.\ \text{ſin.}\, (\frac{\alpha' - \alpha}{2})}$$ adhibere licebit

$1 - \text{cot.}\, \zeta.\ \text{ſin.}\, (\frac{\alpha' - \alpha}{2})$; quare fiet

$$\text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha') = \frac{\text{ſin.}\, c}{\text{ſin.}\, a\ \text{coſ.}\, \beta}\ (1 - \text{cot.}\, \zeta.\ \text{ſin.}\, \tfrac{\alpha' - \alpha}{2}),$$

quae formula valorem ſatis propinquum ipſius $\alpha + \alpha'$ exprimit.

§. 11. Pro inueniendo autem valore anguli $\frac{\alpha - \alpha'}{2}$, ſequenti ratiocinio vti licebit: quia eſt

$$\text{coſ.}\, (f - c) = \text{coſ.}\, a.\ \text{coſ.}\, e + \text{ſin.}\, a.\ \text{ſin.}\, e\ \text{coſ.}\, (\zeta - \alpha) \text{ et}$$
$$\text{coſ.}\, (f + c) = \text{coſ.}\, a.\ \text{coſ.}\, e + \text{ſin.}\, a.\ \text{ſin.}\, e\ \text{coſ.}\, (\zeta + \alpha'),$$

fiet

$$\frac{\text{coſ.}\, (f - c) + \text{coſ.}\, (f + c) - 2\, \text{coſ.}\, a.\ \text{coſ.}\, e}{\text{ſin.}\, a.\ \text{ſin.}\, e} = \text{coſ.}\, (\zeta - \alpha) + \text{coſ.}\, (\zeta + \alpha'),$$

hincque

$$\frac{\text{coſ.}\, f\ \text{coſ.}\, c - \text{coſ.}\, a\ \text{coſ.}\, e}{\text{ſin.}\, a.\ \text{ſin.}\, e} = \text{coſ.}\, (\zeta + \tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha))\ \text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha'),$$

vnde

coſ.

$$\frac{\mathrm{coſ.}\, f.\, \mathrm{coſ.}\, c - \mathrm{coſ.}\, a.\, \mathrm{coſ.}\, e}{\mathrm{ſin.}\, a.\, \mathrm{ſin.}\, e.\, \mathrm{coſ.}\, \frac{1}{2}(\alpha + \alpha')} = \mathrm{coſ.}\, \zeta\, \mathrm{coſ.}\, \tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha)$$
$$- \mathrm{ſin.}\, \zeta.\, \mathrm{ſin.}\, \tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha),$$

hinc igitur obtinebimus

$$\mathrm{ſin.}\, \tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha) = \frac{-\mathrm{coſ.}\, f.\, \mathrm{coſ.}\, c + \mathrm{coſ.}\, a.\, \mathrm{coſ.}\, e}{\mathrm{ſin.}\, \zeta.\, \mathrm{ſin.}\, a.\, \mathrm{ſin.}\, e.\, \mathrm{coſ.}\, \frac{1}{2}(\alpha + \alpha')},$$

vbi quidem ſi ponantur $\mathrm{coſ.}\, \frac{1}{2}(\alpha + \alpha')$, $\mathrm{coſ.}\, \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)$ vnitati aequales, tum vero loco $\mathrm{cot.}\, \zeta$, $\mathrm{coſ.}\, e$, et $\mathrm{ſin.}\, \zeta.\, \mathrm{ſin.}\, e$ ſubſtituantur eorum valores:

$$\frac{\mathrm{coſ.}\, f.\, \mathrm{ſin.}\, a. - \mathrm{ſin.}\, f.\, \mathrm{coſ.}\, a.\, \mathrm{ſin.}\, \beta}{\mathrm{ſin.}\, f\, \mathrm{coſ.}\, \beta},\quad \mathrm{coſ.}\, a\, \mathrm{coſ.}\, f + \mathrm{ſin.}\, a\, \mathrm{ſin.}\, f.\, \mathrm{ſin.}\, \beta,$$

$\mathrm{ſin.}\, f.\, \mathrm{coſ.}\, \beta$, fiet

$$\mathrm{ſin.}\, \tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha) = \frac{\mathrm{cot.}\, f.\, (1 - \mathrm{coſ.}\, c)}{\mathrm{ſin.}\, a\, \mathrm{coſ.}\, \beta} = \frac{2\, \mathrm{cot.}\, f.\, \mathrm{ſin.}\, \frac{1}{2} c^2}{\mathrm{ſin.}\, a\, \mathrm{coſ.}\, \beta}.$$

Caeterum quia correctio $\mathrm{cot.}\, \zeta.\, \mathrm{ſin.}\, \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)$ valorem anguli ζ involuit, facile perſpicitur, iis in caſibus, vbi huius correctionis rationem habere neceſſe ſit, multum praeſtare, vt ex inuentis valoribus anguli ζ et lateris e, quaerantur anguli $\zeta - \alpha$, $\zeta + \alpha'$ per formulas ſaepius propoſitas, pro quarum faciliori computo ſtatuere licebit, $\mathrm{coſ.}\, a.\, \mathrm{coſ.}\, e = \mathrm{coſ.}\, g$, vnde fiet

$$\mathrm{coſ.}\, (\zeta - \alpha) = \frac{\mathrm{coſ.}\, (f - c) - \mathrm{coſ.}\, g}{\mathrm{ſin.}\, a.\, \mathrm{ſin.}\, e}$$
$$= \frac{2\, \mathrm{ſin.}\, \frac{1}{2}(f + c + g)\, \mathrm{ſin.}\, \frac{1}{2}(g - f + c)}{\mathrm{ſin.}\, a\, \mathrm{ſin.}\, e} \quad \text{et}$$
$$\mathrm{coſ.}\, (\zeta + \alpha') = \frac{\mathrm{coſ.}\, (f + c) - \mathrm{coſ.}\, g}{\mathrm{ſin.}\, a\, \mathrm{ſin.}\, e}$$
$$= \frac{2\, \mathrm{ſin.}\, \frac{1}{2}(f + c + g)\, \mathrm{ſin.}\, \frac{1}{2}(g - f - c)}{\mathrm{ſin.}\, a\, \mathrm{ſin.}\, e}.$$

§. 12.

§. 12. Quia eſt

$$\frac{\text{ſin. } c.\ \text{ſin. } f}{\text{ſin. } a.\ \text{ſin. } e.\ \text{ſin. } \tfrac{1}{2}(\alpha' + \alpha)} = \text{ſin. } \zeta + \left(\frac{\alpha' - \alpha}{2}\right)$$

$$= \text{ſin. } \zeta.\ \text{coſ.} \left(\frac{\alpha' - \alpha}{2}\right) + \text{coſ. } \zeta\ \text{ſin.} \left(\frac{\alpha' - \alpha}{2}\right) \text{ et}$$

$$\frac{\text{coſ. } f.\ \text{coſ. } c - \text{coſ. } a\ \text{coſ. } e}{\text{ſin. } a.\ \text{ſin. } e.\ \text{coſ. } \tfrac{1}{2}(\alpha' + \alpha)} = \text{coſ. } \zeta.\ \text{coſ. } \tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha)$$

$$- \text{ſin. } \zeta.\ \text{ſin. } \tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha),$$

ſi breuitatis gratia ponatur

$$\frac{\alpha' + \alpha}{2} = s;\ \frac{\alpha' - \alpha}{2} = d;\ \frac{\text{ſin. c. ſin. f}}{\text{ſin. a. ſin. e}} = \text{M et}$$

$$\frac{\text{coſ. f. coſ. c} - \text{coſ. a. coſ. e}}{\text{ſin. a ſin. e}} = \text{N, erit}$$

$$\frac{\text{M}}{\text{ſin. } s} = \text{ſin. } \zeta.\ \text{coſ. } d + \text{coſ. } \zeta.\ \text{ſin. } d, \text{ et}$$

$$\frac{\text{N}}{\text{coſ. } s} = \text{cot. } \zeta.\ \text{coſ. } d - \text{ſin. } \zeta.\ \text{ſin. } d,$$

vnde ſumtis quadratis, illisque inuicem additis, obtinebitur

$$\frac{\text{M}^2}{\text{ſin. } s^2} + \frac{\text{N}^2}{\text{coſ. } s^2} = 1, \text{ hinc}$$

$$\text{M}^2 (1 - \text{ſin. } s^2) + \text{N}^2\ \text{ſin. } s^2 = \text{ſin. } s^2 - \text{ſin. } s^4,$$

ideoque

$$\text{ſin. } s^4 - \text{ſin. } s^2 (1 - \text{N}^2 + \text{M}^2) + \text{M}^2 = 0,$$

vbi igitur valor ipſius s ope aequationis biquadraticae determinari debet, quae tamen inſtar quadraticae tractari poteſt. Caeterum quia ſin. s^2 ſupponitur valde paruum, habebitur approximando,

$$\text{ſin. } s^2 = \frac{\text{M}^2}{1 - \text{N}^2},\ \text{coſ. } s^2 = \frac{1 - \text{N}^2 - \text{M}^2}{1 - \text{N}^2},$$

tumque porro

$$\text{ſin. } s^2 = \frac{\text{M}^2.\ \text{coſ. } s^2}{\text{coſ. } s^2 - \text{N}^2} = \frac{\text{M}^2 (1 - \text{N}^2 - \text{M}^2)}{1 - 2\,\text{N}^2 - \text{M}^2 + \text{N}^4}.$$

§. 13.

§. 13. In ſuperioribus ſuppoſuimus eſſe $b = b' = a$. Quod ſi vero rationem quoque habere velimus diſcrepantiae, quae inter hos arcus intercedit, inueſtigatio anguli $\alpha + \alpha'$ ſequenti ratione expedienda eſt: Ob

$$\text{coſ.}(f-c) = \text{coſ.}\, b\, \text{coſ.}\, e + \text{ſin.}\, b\, \text{ſin.}\, e\, \text{coſ.}(\zeta - \alpha),$$
$$\text{coſ.}(f+c) = \text{coſ.}\, b'\, \text{coſ.}\, e + \text{ſin.}\, b'\, \text{ſin.}\, e\, \text{coſ.}(\zeta + \alpha'),$$

ſi prior aequatio multiplicetur per ſin. b', poſterior per ſin. b, earumque differentia capiatur, erit

$$\text{coſ.}(f-c)\,\text{ſin.}\, b' - \text{coſ.}(f+c)\,\text{ſin.}\, b = \text{coſ.}\, e\, \text{ſin.}(b'-b)$$
$$+ \text{ſin.}\, b.\, \text{ſin.}\, b'\, \text{ſin.}\, e.\,(\text{coſ.}(\zeta-\alpha) - \text{coſ.}(\zeta+\alpha')),$$

hincque

$$\frac{\text{coſ.}(f-c).\,\text{ſin.}\, b' - \text{coſ.}(f+c)\,\text{ſin.}\, b - \text{coſ.}\, e.\, \text{ſin.}(b'-b)}{\text{ſin.}\, b'\, \text{ſin.}\, b\, \text{ſin.}\, e}$$
$$= 2\, \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}(\alpha'+\alpha)\, \text{ſin.}\,(\zeta + \tfrac{\alpha'-\alpha}{2}),\ \text{ſiue}$$

$$\text{coſ.}\, f.\, \text{coſ.}\, c.\,(\text{ſin.}\, b' - \text{ſin.}\, b) + \text{ſin.}\, f.\, \text{ſin.}\, c\,(\text{ſin.}\, b' + \text{ſin.}\, b)$$
$$-\text{coſ.}\, e.\, \text{ſin.}(b'-b) = 2\, \text{ſin.}\, b'\, \text{ſin.}\, b\, \text{ſin.}\, e.\, \text{ſin.}\,(\tfrac{\alpha'+\alpha}{2})\, \text{ſin.}(\zeta + (\tfrac{\alpha'-\alpha}{2})).$$

Tumque ob

$$\text{ſin.}\, b' - \text{ſin.}\, b = 2\, \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}(b'-b)\, \text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}(b'+b),$$
$$\text{ſin.}\, b' + \text{ſin.}\, b = 2\, \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}(b'+b)\, \text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}(b'-b),$$
$$\text{ſin.}\,(b'-b) = 2\, \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}(b'-b)\, \text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}(b'-b),$$

colligitur

$$\text{ſin.}\, f.\, \text{ſin.}\, c.\, \text{ſin.}\, \tfrac{b'+b}{2}\, \text{coſ.}\, \tfrac{b'-b}{2}$$
$$+ \text{coſ.}\, f\, \text{coſ.}\, c\, \text{ſin.}\, \tfrac{b'-b}{2}\, \text{coſ.}\, \tfrac{b'+b}{2} - \text{coſ.}\, e\, \text{ſin.}\, \tfrac{b'-b}{2}\, \text{coſ.}\, \tfrac{b'-b}{2}$$
$$= \text{ſin.}\, b'.\, \text{ſin.}\, b.\, \text{ſin.}\, e.\, \text{ſin.}\, \tfrac{\alpha'+\alpha}{2}\, \text{ſin.}\,(\zeta + \tfrac{\alpha'-\alpha}{2});$$

ex qua formula, ſi ponatur

$$\tfrac{b'+b}{2} = a,\ \text{coſ.}\, \tfrac{b'-b}{2} = 1 \ \text{et} \ \text{ſin.}\,(\zeta + \tfrac{\alpha'-\alpha}{2}) = \text{ſin.}\, \zeta,$$

prodibit

$$\text{ſin.}\frac{\alpha'+\alpha}{2}=\frac{\text{ſin.}f.\text{ſin.}c.\text{ſin.}a+\text{coſ.}f.\text{coſ.}c.\text{coſ.}a.\text{ſin.}\frac{b'-b}{2}-\text{coſ.}e.\text{ſin.}\frac{b'-b}{2}}{\text{ſin.}b.\text{ſin.}b'.\text{ſin.}e.\text{ſin.}\zeta}$$

$$=\frac{\text{ſin.}c.\text{ſin.}a}{\text{ſin.}b.\text{ſin.}b'.\text{coſ.}\beta}-\frac{\text{ſin.}\frac{b'-b}{2}.\text{coſ.}f.\text{coſ.}a(1-\text{coſ.}c)}{\text{ſin.}b.\text{ſin.}b'.\text{ſin.}f.\text{coſ.}\beta}$$

$$-\frac{\text{ſin.}a.\text{ſin.}\beta.\text{ſin.}\frac{b'-b}{2}}{\text{ſin.}b.\text{ſin.}b'.\text{coſ.}\beta},$$

ob cot. e = coſ. a: coſ. f + ſin. a. ſin. f. ſin. β et ſin. e ſin. ζ = ſin. f. coſ. β. Heic autem membrum intermedium, ob factorem ſin. $\frac{b'-b}{2}$ (1 − coſ. c) prorſus exiguum, tuto omitti poſſe videtur, vnde conficitur

$$\text{ſin.}\frac{\alpha'+\alpha}{2}=\frac{\text{ſin.}c.\text{ſin.}a}{\text{ſin.}b.\text{ſin.}b'.\text{coſ.}\beta}-\frac{\text{ſin.}a.\text{tang.}\beta.\text{ſin.}\frac{b'-b}{2}}{\text{ſin.}b.\text{ſin.}b'}.$$

Caeterum inutile foret heic prolixius inquirere, quomodo haec expreſſio alteriori approximatione ad maiorem adhuc exactitudinem perduci queat, cum iſtis in caſibus, vbi valores angulorum α', α, multum inter ſe diſcrepantes prodire queant, ſine dubio praeſtabit formulis omni rigore veris vti.

§. 14. Plerumque quidem euenit, vt arcus P O, interuallo temporis angulo O P Q vel O P Q′ reſpondens, vix ſenſibilem patiatur mutationem; interim tamen vt iſta mutatio ſenſibilis fieret, quin cognita ſupponi non poteſt, niſi ipſe angulus O P Q vel O P Q′ innotuerit, negotium ita perfici poterit, vt primum exquiratur angul. O P Q vel O P Q′, qui pro valore conſtanti ipſius P O locum haberet, quo ipſo innoteſcet, quantam mutationem declinatio interuallo temporis, quod angulo O P Q vel O P Q′ re-

ſpon-

ſpondet, ſubierit, vnde denuo variatio anguli O P Q ex mutato valore ipſius P Q innoteſcet. Conſtat autem ex Trigonometria ſphaerica, eſſe variationem anguli Π P Q in triangulo Π P Q ad variationem lateris P Q $= -$ ſin. P Q Π : ſin. P Q, vbi loco anguli P Q Π plerisque in caſibus angulus P O Π adhiberi poterit. Tab. X. Fig. 3.

§. 15. In §. ſup. 12, vbi de inueſtigando valore anguli $s = \frac{\alpha' + \alpha}{2}$ egimus, inuenimus aequationem biquadraticam huic propoſito inſeruientem. Conueniet igitur vt examinemus, an ipſa quaeſtionis indoles ad aequationem biquadraticam perducat. Sit igitur M O N arcus circuli, quem centrum Solis in puncto O tranſit, punctis contactuum imaginis Solis exiſtentibus in Q, Q′; tum ducto ad polum Aequatoris arcu circuli maximi P O, facile patet, circulum Polo P, internallo P O deſcriptum, circulum M O N in alio quodam puncto O′ ſecturum fore, ibique centrum Solis hunc arcum tranſiturum eſſe; vnde huic puncto correſpondentes dabuntur, in quibus imago Solis arcum M O′ contingere videbitur. Haec igitur puncta ſi indigitentur per R, R′; angulus α deſignabit vel Q P O vel R P O, et α' deſignabit vel O P Q′ vel O P R′, quare iam patet, ſin. s quatuor habere poſſe valores, vbi tamen ſinguli bini non niſi ſignis differunt; ſic enim fiet

ſin. Q P Q′ $= -$ ſin. (R P O $+$ O P R′) $=$ ſin. (360° $-$ Q P Q′),

tumque

ſin. (R P O $+$ O P Q′) $= -$ ſin. (O P Q $+$ O P R′), nam

R P O $+$ O P Q $+$ O P Q′ $+$ O P R′ $=$ 360°, ob

O P Q $=$ O′ P R; O P Q′ $=$ R′ P O′.

§. 16. Quae hucusque expoſita fuerunt, de tranſitu Solis per arcum cuiuscunque circuli in ſuperficie ſphaerae coeleſtis deſcripti valent, ideoque eorum applicatio facile ad tranſitum imaginis Solis per fila verticalia et horizontalia quadrantis et alius inſtrumenti aſtronomici fieri poteſt. Filum enim verticale exprimit tangentem circuli verticalis, et filum horizontale exprimet tangentem circuli maximi, per punctum, vbi bina fila ſe decuſſant, ad circulum verticalem perpendiculariter deſcripti. Pro reliquis vero caſibus, vbi de tranſitu per alios circulos quaeſtio eſt, obſeruari conuenit, ſitum huiusmodi circuli in ſphaera coeleſti ita determinari, vt per polum Aequatoris et polum circuli propoſiti ducatur circulus maximus, circulo iſto in puncto M occurrens, tum vero deſcriptus intelligatur meridianus P Z per polum aequatoris et zenith loci: his enim factis, ſitus circuli iſtius innoteſcet, ex cognitis arcubus Π P, Π M, et angulo Z P M vel Z P Π.

§. 17. Quoniam in valoribus approximatis pro $\alpha + \alpha'$ valor anguli R O P $= \beta$ ingreditur, neceſſe erit vt oſtendamus, qua ratione hunc angulum inueſtigare conueniet. Primum igitur, quia tempus quo tranſitus Solis obſeruatus eſt, cognitum habeatur, dabitur etiam valor arcus P O; tumque ſi circulus, per quem tranſitus factus ſit, fuerit maximus, ponamus illum occurrere meridiano loci in Z, vnde ex cognitis Z P, P O, Z P O, dabitur angulus Z O P. At ſi circulus fuerit minor, ex cognitis angulis Z P Π, Z P O, innoteſcit O P Π, vnde ex datis P O, P Π et angulo O P Π cognoſcetur angulus P O Π $= 90° -$ R O P, vel etiam ex cognitis lateribus P Π, Π O et angulo Π P O, quaerendus eſt angulus P O Π. Caeterum conſideratio poſte-

ſterioris huius caſus in praxi aſtronomica inutilis eſt, quia, dum obſeruatur tranſitus imaginis Solis per filum quomodocunque diſpoſitum, facile intelligitur hoc filum repraeſentare tangentem circuli alicuius maximi.

§. 18. Vt autem vſus eorum, quae in praecedentibus allata ſunt, eo euidentius innoteſcat, ad exempla nonnulla deſcendamus. Ponamus igitur quaeſtionem eſſe de tempore, quo imago Solis filum verticale tranſit, exiſtente $c = 15', 30''$, $PO = a = 67°$ et angulo $POZ = \beta = 85°$. Per formulam igitur ab Aſtronomis vſitatam, $\alpha + \alpha' = \frac{2c}{\text{ſin}.\, a.\, \text{coſ}.\, \beta}$ fiet $\alpha + \alpha' = 6°, 26', 24''$. At calculo ſecundum formulas noſtras exacte veras inſtituto, reperitur primum $e = 23°, 30', 30''$ et $\zeta = 167°, 22', 44'', 6$, tum vero $\zeta - \alpha$, $164°, 29', 3'', 8$, et $\zeta + \alpha' = 171°, 9', 29'', 7$, ita vt ſit $\alpha' + \alpha = 6°, 40', 25'', 9$; $\alpha = 2°, 53', 40'', 8$; $\alpha' = 3°, 46', 45'', 1$; hinc $\frac{\alpha' - \alpha}{2} = 26', 32'', 1$. Tum vero ſi formulae:

$$\text{ſin}.\, \frac{\alpha' + \alpha}{2} = \frac{\text{ſin}.\, c.\, \text{ſin}.\, \zeta.}{\text{ſin}.\, a.\, \text{coſ}.\, \beta.\, \text{ſin}.\, (\zeta + \frac{\alpha' + \alpha}{2})}$$

vſum facere velimus, reperiemus $\frac{\alpha' + \alpha}{2} = 3°, 20', 13'', 1$. ex quo prior noſter calculus ſatis confirmatur, diſſenſu vtriusque concluſionis $\frac{1}{5}$ ſcrupuli ſecundi vix exſuperante Hoc igitur exemplum commonſtrat, variis in caſibus fieri poſſe, vt formula ab Aſtronomis propoſita pro computando tranſitu diametri Solis per filum ſiue verticale ſeu horizontale, ad erroneas perducat concluſiones, errore quidem in caſu propoſito exiſtente 14 minut. primor., vnde pro tempore tranſitus error 56 ſecund. reſultaret.

§. 19.

§. 19. Approximatio pro valore ipſius ſin. $\frac{\alpha' - \alpha}{2}$ ſupra §. 11. allata, caſu quo $f = 90°$, omnino incongrua euadit; interim tamen re bene perpenſa, aliam approximationem pro hoc caſu adferre licebit. Cum nimirum ſit

$$\text{ſin.}\,\frac{\alpha' - \alpha}{2} = \frac{\text{coſ.}\,a.\,\text{coſ.}\,e}{\text{ſin.}\,a.\,\text{ſin.}\,e.\,\text{ſin.}\,\zeta.\,\text{coſ.}\,\frac{\alpha'+\alpha}{2}} + \text{cot.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\frac{\alpha' - \alpha}{2}$$

ſi ponatur coſ. $\frac{\alpha' - \alpha}{2} = 1$, tumque pro cot. ζ, coſ. e, ſin. e. ſin. ζ introducantur eorum valores

$$-\text{tang.}\,\beta.\,\text{coſ.}\,a,\ \text{ſin.}\,a.\,\text{ſin.}\,\beta \text{ et coſ.}\,\beta; \text{ fiet}$$

$$\text{ſin.}\,\frac{\alpha' - \alpha}{2} = \frac{\text{tang}\,\beta\,\text{coſ}\,\alpha\,(1 - \text{coſ.}\,\frac{\alpha'+\alpha}{2})}{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}(\alpha'+\alpha)} = \frac{\text{tang.}\,\beta.\,\text{coſ.}\,a.\,2\,\text{ſin.}\,\frac{(\alpha'+\alpha)^2}{4}}{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}(\alpha'+\alpha)},$$

ſeu etiam, quia plerumque $\frac{\alpha' - \alpha}{2}$ valde paruum eſt,

$$\alpha' - \alpha = \alpha' + \alpha.\,\text{ſin.}\,\frac{\alpha'+\alpha}{4}\,\text{tang}\,\beta\,\text{coſ.}\,\alpha.$$
$$= -(\alpha' + \alpha)\,\text{ſin.}\,\frac{\alpha'+\alpha}{4}\,\text{cot.}\,\zeta.$$

Verumtamen ſi pro caſu propoſito huius approximationis vſum facere velimus, ponendo $\alpha' + \alpha = 6°, 26', 34''$, inuenimus $\alpha' - \alpha = 47', 24''$, diſſenſu a veritate plusquam quinque minutorum primorum exiſtente, adeo vt in caſibus dubiis vix vllo cum vſu haec approximatio adhiberi queat.

§. 20. Quia valores angulorum α', α, adeo diuerſi eſſe poſſunt, facile quidem perſpicitur, caſus incidere, vbi pro ang. α' valores conuenientes proponi nequeant; quod fiet vbi $\frac{\text{ſin.}\,c + \text{coſ.}\,a.\,\text{coſ.}\,e}{\text{ſin.}\,a.\,\text{ſin.}\,e} > 1$, hoc eſt, ſin. $c > -$ coſ. $(a + e)$, vel ſin. $c >$ ſin. $(a + e - 90)$. Limes ergo valorem realium ipſius α' pro caſu, quo $a = 67°$ et $c = 15', 30''$, is erit, vbi $\beta = 86°, 26', 43''$, tum ſcilicet fiet $e = 23°, 15'$, 30'',

$30''$, ideoque $a + e - 90 = 15', 30'' = c$, hinc habebitur $\zeta + \alpha' = 180$, et $\zeta - \alpha = 167^\circ, 12', 39''.4$, exiſtente $\zeta = 170^\circ, 57', 58'', 9$, ex quo colligitur $\alpha' + \alpha = 12^\circ, 47', 20'', 6$, et $\alpha' - \alpha = 5^\circ, 16', 41'', 6$, ita vt haec differentia angulorum α', α, angulum minorem α magnitudine excedat. Manentibus autem valoribus ipſorum a et c, ſi β vltra $86^\circ, 26', 42''$ augeatur, liquet pro α' nullos valores reales adferri poſſe.

§. 21. Praeterea illi quoque incidunt caſus, vbi neque angulus α valorem ſortitur realem; patet autem limitem valorum realium pro α ibi conſtituendum, vbi ang. $\beta = 90^\circ$, hoc eſt vbi circulus minor, polo P, interuallo P O deſcriptus, tangit circulum Z O in O. Pro hoc autem caſu valor anguli $OPQ = \alpha$, ſequentem in modum indagatur. In Triang. Q P Π erit coſ. Π Q = ſin. N Q = coſ. P Q coſ. P Π + ſin. P Q. ſin. P Π. coſ. Q P Π = coſ O P. coſ. P Π + ſin O P. ſin P Π. coſ. Q P Π = coſ. O P. ſin. O P (1 − coſ. O P Q), ob $OP + PO = 90^\circ$ et $OPQ = 180 - QP\Pi$, hinc fiet Tab. X. Fig. 4.

$$\text{ſin. } c = \text{ſin. } 2\,a.\ \text{ſin. } \tfrac{1}{2}\,\alpha^2 \quad \text{et} \quad \text{ſin. } \tfrac{1}{2}\,\alpha^2 = \frac{\text{ſin. } c}{\text{ſin. } 2\,a}.$$

Idem vero et ſic demonſtratur:

ſin. N Q = ſin. O Q. coſ. P O Q = 2 ſin. ½ O Q. coſ. ½ O Q. coſ. P O Q, atqui eſt

$$\text{ſin. } \tfrac{1}{2}\,OQ = \text{ſin. } OP.\ \text{ſin. } \tfrac{1}{2}\,OPQ. \quad \text{et} \quad \text{coſ. } \tfrac{1}{2}\,OQ = \frac{\text{coſ. } OP}{\text{coſ. } PS},$$

tumque denuo

$$\frac{\text{coſ. } POQ}{\text{coſ. } PS} = \text{ſin. } \tfrac{1}{2}\,POQ, \text{ proinde}$$

$$\text{ſin. } NQ = 2\ \text{ſin. } OP.\ \text{coſ. } OP.\ \text{ſin. } \tfrac{1}{2}\,OPQ^2.$$

Tab. X. Fig. 5

§. 22. Denique ſi ſitus circuli maximi S M N talis ſit, vt imago Solis eum in N tangat, centrum autem Solis non propius quam ad diſtantiam datam M O, ſemidiametro Solis minorem, huic arcui appropinquare poſſit, quaeritur valor anguli O P Q, qui reſpondet tempori, quo centrum Solis a Q ad O peruenerit. Adhibita igitur eadem conſtructione ac in praecedentibus, ſi arcus O M littera e exprimatur, erit $P\Pi = 90 - a - e$, hinc ob

$$\text{coſ.}\,\Pi Q = \text{coſ.}\,P Q.\,\text{coſ.}\,\Pi P + \text{ſin.}\,P Q.\,\text{ſin.}\,\Pi P.\,\text{coſ.}\,Q P \Pi,$$

$$\text{ſin.}\,c = \text{coſ.}\,a.\,\text{ſin.}\,(a+e) - \text{ſin.}\,a.\,\text{coſ.}\,(a+e)\,\text{coſ.}\,\alpha,$$

tumque

$$\text{ſin}\,c - \text{coſ.}\,a\,\text{ſin.}\,(a+e) + \text{ſin.}\,a\,\text{coſ.}\,(a+e) = \text{ſin.}\,a\,\text{coſ}\,(a+e)\,(1 - \text{coſ}\,\alpha)$$

ſiue $\text{ſin.}\,c - \text{ſin.}\,e = \text{ſin.}\,a\,\text{coſ.}\,(a+e)\,(1 - \text{coſ.}\,\alpha)$ et

$$\frac{\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}(c-e)\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(c+e)}{\text{ſin.}\,a.\,\text{coſ.}\,(a+e)} = \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha^2.$$

§. 23. Etiamſi vero caſus exiſtant, quibus formula iſta approximatione eruta: $\text{ſin.}\,\frac{\alpha'+\alpha}{2} = \frac{\text{ſin.}\,c}{\text{ſin.}\,\alpha.\,\text{coſ}\,\beta.}$ ad valde erroneas ducat concluſiones: tamen, eo non obſtante, eius vſus rite in calculis aſtronomicis adhibetur, quod hi caſus non prodeant, niſi vbi angulus valde fuerit magnus. Inuenimus, autem calculo inſtituto pro angulo $\beta = 78°$, exiſtente $a = 67$, et $c = 15', 30''$, per formulas noſtras omni rigore veras, $\alpha' + \alpha = 2°, 42', 8'', 8$, et per formulam approximatione erutam, $\alpha' + \alpha = 2°, 42'\ 0''$, diſſenſu non maiore quam $8'', 8$, exiſtente; vnde ſi approximatione vti quis vellet, in determinando tempore tranſitus nonniſi errorem ſemiſſis minuti ſecundi committere poterit. Hinc igitur concludimus, pro angulis β minoribus quam 78°, ſine

ſine ſenſibilis erroris periculo formulam ſin. $\frac{\alpha' + \alpha}{2} = \frac{\text{ſin. } c}{\text{ſin. } a . \text{coſ. } \beta}$
in vſum reuocari poſſe.

§. 24. Cum maxima variatio in declinatione Solis, interuallo 24 horarum, 23 minuta prima cum dimidio vix excedat, pro inueſtigando angulo $\alpha' + \alpha$, variationis in declinatione Solis rationem habere neceſſe non erit, niſi illis in caſibus, vbi ang. β propius ad 90° accedit. Tum vero ſi arcus P Q dicatur b et arcus P Q′, b', horum arcuum differentia ab arcu P O inuenietur, ſi primum pro computando angulo O P Q′ adhibeatur formula: ſin. $\frac{\alpha' + \alpha}{2} = \frac{\text{ſin. } c}{\text{ſin. } a . \text{coſ. } \beta}$, tum vero exquiratur variatio in declinatione Solis, reſpondens tempori per angulum modo inuentum $\frac{1}{2}(\alpha' + \alpha)$ expreſſo, quae ſi dicatur δ, erit $b = a - \delta$, et $b' = a + \delta$, proxime; quibus valoribus adhibitis fiet vt antea

$$\text{ſin. } c - \text{coſ. } b . \text{coſ. } e = \text{ſin. } b . \text{ſin. } e . \text{coſ. } (\zeta - \alpha), \text{ et}$$
$$- \text{ſin. } c - \text{coſ. } b' . \text{coſ. } e = \text{ſin. } b' . \text{ſin. } e . \text{coſ. } (\zeta + \alpha').$$

Quodſi vero valores ipſorum b, b' ſatis exacti nondum habeantur, eos denuo noua correctione emendare licebit.

§. 25. Quae in praecedentibus allata ſunt, applicari quidem quoque poterunt ad tranſitum Lunae per filum quodpiam in foco cuiuſdam tubi collocatum; verum tum praeter cautelas modo commemoratas obſeruandas, inſuper ratio habenda eſt ſitus Lunae per Parallaxin immutati, nec non motus Lunae in aſcenſionem rectam; ita vt loco declinationis verae adhiberi debeat declinatio apparens, tum vero conuerſio anguli O P Q in tempus debet fieri in ratione, qua 15° excedunt differentiam inter motum horarium Lunae et Solis in aſcenſionem rectam, ſi ſcilicet tempus motui Solis accommodatum adhibeatur.

 OBSER-

OBSERVATIONES
DE PROBLEMATE,
QVO
QVAERITVR ELEVATIO POLI, EX OBSERVATA ALTITVDINE SOLIS, ET OBSERVATO QVOQVE TEMPORE, QVO DIAMETER SOLIS FILVM ALIQVOD, SIVE VERTICALITER, SIVE HORIZONTALITER DISPOSITVM, PERTRANSIT.

Auctore

A. I. LEXELL.

§. 1.

Problema hoc a celebri Anglorum Aſtronomo *Lyons* in Ephemeridibus nauticis pro Anno 1778 propoſitum habetur, cumque primo intuitu valde ſpecioſum videatur, omnino meretur vt accuratiori examini ſubiiciatur. Re autem bene penſitata liquet, Problema eo reduci, vt in triangulo ſphaerico Z S P, vbi Z deſignat zenith loci, P polum Aequatoris et S locum Solis, ex datis lateribus Z S, P S et angulo Z S P, quaeratur latus P Z, ſeu, vti Aſtro-

Tab. XI. Fig. 1.

Aſtronomi loqui ſolent, vt ex datis altitudine et declinatione Solis, nec non angulo parallactico, quaeratur eleuatio poli. Scilicet per obſeruatum tempus, quod diameter Solis impendit ad percurrendum filum commemoratum, dabitur quantitas anguli parallactici, vt mox declarabimus. Prius autem operae pretium erit, vt examinemus, quanti errores in valorem arcus P Z deriuentur, ex illis erroribus, qui in obſeruando ſiue arcu Z S, ſeu angulo Z S P commiſſi fuerunt. Nam de arcu P S, cuius valor ex tabulis deſumitur, vix vllum eſſe poteſt dubium, modo Longitudo geographica loci, in quo obſeruatio facta eſt, et tempus ipſum obſeruationis proxime cognita habentur.

§. 2. Primum igitur, ſi quaeratur variatio ipſius P Z ex variatione S Z oriunda, exprimantur arcus P Z, P S, Z S per z, a, v, et angulus Z S P per η, eritque vt ex doctrina triangulorum ſphaericorum conſtat

$$\text{coſ.}\, z = \text{coſ.}\, a.\, \text{coſ.}\, v + \text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, v\, \text{coſ.}\, \eta,$$

hinc ſumtis differentialibus fiet:

$$-dz\, \text{ſin.} z = -dv(\text{coſ.} a. \text{ſin.} v - \text{ſin.} a. \text{coſ.} v. \text{coſ.} \eta) - d\eta\, \text{ſin}\, a. \text{ſin.} v. \text{ſin.} \eta.$$

Heic igitur ſi ponatur η conſtans, fiet variatio arcus z ex variatione dv oriunda

$$= dv \frac{\text{coſ.}\, a.\, \text{ſin.}\, v - \text{ſin.}\, a.\, \text{coſ.}\, v\, \text{coſ.}\, \eta}{\text{ſin.}\, z}.$$

Iam ſi angulus P Q S indigitetur per θ, conſtat eſſe

$$\text{cot.}\, \theta = \frac{\text{coſ.}\, a.\, \text{ſin.}\, v - \text{ſin.}\, a\, \text{coſ.}\, v.\, \text{coſ.}\, \eta}{\text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, \eta},$$

hinc $\text{coſ.}\, a\, \text{ſin.}\, v - \text{ſin.}\, a\, \text{coſ.}\, v\, \text{coſ.}\, \eta = \text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, \eta\, \text{cot.}\, \theta$, et

$$dz = dv \frac{\text{ſin.}\, a.\, \text{ſin.}\, \eta.\, \text{cot.}\, \theta}{\text{ſin.}\, z} = dv\, \text{coſ.}\, \theta,$$

ideoque erit variatio ipſius arcus P Z, ex variatione arcus

Z S oriunda, in proportione anguli azimuthalis P Z S, ideoque minima vbi hic angulus fuerit rectus.

§. 3. Deinde pro variatione arcus z ex variabilitate anguli η deriuanda, fit

$$d z = d \eta \frac{\text{ſin.}\, a.\, \text{ſin.}\, v\, \text{ſin.}\, \eta}{\text{ſin.}\, z} = d \eta\, \text{ſin.}\, a.\, \text{ſin.}\, \phi = d \eta\, \text{ſin.}\, v.\, \text{ſin.}\, \theta,$$

deſignante ϕ angulum Z P S. Heic igitur liquet, variationem ipſius z, ex variatione anguli η oriundam, cum angulo ϕ increſcere, maximamque eſſe vbi $\phi = 90°$, minimam vero, ſeu nullam, vbi $\phi = 0$, hoc eſt in ipſo Meridiano, quod etiam ſponte liquet, quia tum erit $PZ = PS \mp ZS$, ideoque valor anguli η in determinationem ipſius P Z non ingreditur. Hinc igitur patet, errores in altitudine Solis commiſſos eo maiorem habere influxum ad immutandum valorem arcus P Z, quo propius ad Meridianum obſeruatio inſtituta ſit, cum contra errores, in angulo Z S P commiſſi, eo maioris ſint momenti, quo maior fuerit angulus P Z S.

Tab. XI, Fig 2. §. 4. Pro determinando angulo Z S P ope temporis, quo diameter Solis filum verticale ſeu horizontale percurrit, obſeruare conuenit, quod ſi in genere N′ O N deſignet arcum circuli maximi, quem imago Solis in binis punctis N, N′ tangere viſa eſt, cognitusque ſupponatur angulus P O N′, deſignante P O circulum declinationis a polo Aequatoris P ad punctum O ductum, vbi centrum Solis arcum N O N′ tranſire ſupponitur, tumque intelligatur centrum Solis in Q et Q′ extitiſſe, eo tempore, quo contactus imaginis Solis cum arcu N′ O N in punctis N, N′ obſeruatus eſt; ſi ducti concipiantur arcus P Q, P Q′, angulus

QPQ′

Q P Q′ exprimet tempus, quo diameter Solis per arcum M O N tranſit. Quod ſi igitur anguli P O N′, Q P O, reſpectiue per ζ et α indigitentur, c autem deſignet ſemidiametrum Solis, erit proxime $\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\text{ſin.}\,c}{\text{ſin.}\,\alpha.\,\text{coſ.}\,\zeta}$, ſi ſcilicet angulus ζ non valde fuerit magnus, id eſt, non prope ad $90°$ accedat, vt hoc prolixius demonſtrauimus in diſſertatione praecedente de aeſtimando tempore, quo diameter Solis per arcum quendam ſiue verticalem, ſeu horizonti parallelum tranſire videtur.

§. 5. Si angulus α per obſeruationes cognitus ſupponatur, erit

$$\text{coſ.}\,\zeta = \frac{\text{ſin.}\,c}{\text{ſin.}\,a.\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\alpha};$$

applicatione igitur ad caſum praeſentem facta, primum ſi arcus N′ O N deſignet circulum verticalem, erit $\zeta = \eta$, hinc

$$\text{coſ.}\,\zeta = \text{coſ.}\,\eta = \frac{\text{ſin.}\,c}{\text{ſin.}\,a.\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\alpha}.$$

Tum vero ſupra vidimus eſſe

$$\text{coſ.}\,z = \text{coſ.}\,a.\,\text{coſ.}\,v + \text{ſin.}\,a.\,\text{ſin.}\,v\,\text{coſ.}\,\eta,$$

ideoque pro $\text{ſin.}\,a\,\text{coſ.}\,\eta$ introducendo eius valorem,

$$\text{coſ.}\,z = \text{coſ.}\,a.\,\text{coſ.}\,v + \frac{\text{ſin.}\,v.\,\text{ſin.}\,c}{\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\alpha} = \text{coſ.}\,a\left(\text{coſ.}\,v + \frac{\text{ſin.}\,v.\,\text{ſin.}\,c}{\text{coſ.}\,a\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\alpha}\right).$$

Si igitur ſtatuatur

$$\frac{\text{ſin.}\,c}{\text{coſ.}\,a\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\alpha} = \text{Tang.}\,x, \text{ fiet}$$

fiet $\text{coſ.}\,z = \frac{\text{coſ.}\,a.\,\text{coſ.}\,(v - x)}{\text{coſ.}\,x}$, quae formula ſatis concinna eſt; ſaltem pro caſu praeſenti ſimpliciſſimam ſuppeditat ſolutionem.

§. 6.

§. 6. Si vero arcus N′ON deſignet circulum maximum, quem filum horizontale in puncto O tangit, erit $\text{coſ.}\ \zeta = \text{ſin.}\ \eta$, ideoque pro hoc caſu ex formula

$$\text{coſ.}\ \zeta = \frac{\text{ſin.}\ c}{\text{ſin.}\ a.\ \text{ſin.}\ \tfrac{1}{2}\alpha}$$

quaeratur angulus ζ, tumque erit $\eta = 90 - \zeta$, poſtmodum vero erit

$$\text{coſ.}\ z = \text{coſ.}\ a.\ \text{coſ.}\ v + \text{ſin.}\ a.\ \text{ſin.}\ v.\ \text{coſ.}\ \eta., \text{ ſiue}$$
$$\text{coſ.}\ z = \text{coſ.}\ (a - v) - 2\ \text{ſin.}\ a.\ \text{ſin.}\ v.\ \text{ſin.}\ \tfrac{1}{2}\eta^2., \text{ vel}$$
$$\text{coſ.}\ z = \text{coſ.}\ (a + v) + 2\ \text{ſin.}\ a.\ \text{ſin.}\ v.\ \text{coſ.}\ \tfrac{1}{2}\zeta^2;$$

tumque

$$\text{ſin}\ \tfrac{1}{2}z^2 = \left(\text{ſin.}\left(\tfrac{a-v}{2}\right)\right)^2 + \text{ſin.}a.\text{ſin.}v.\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\eta^2 = \left(\text{ſin.}\left(\tfrac{a+v}{2}\right)\right)^2 - \text{ſin.}a.\text{ſin}.v.\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\eta^2;$$
$$\text{coſ.}\tfrac{1}{2}z^2 = \left(\text{coſ.}\left(\tfrac{a-v}{2}\right)\right)^2 - \text{ſin.}a.\text{ſin}\ v.\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\eta^2 = \left(\text{coſ.}\left(\tfrac{a+v}{2}\right)\right)^2 + \text{ſin.}a.\text{ſin.}v.\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\eta^2,$$

vnde iterum quatuor formulae pro Tang. $\tfrac{1}{2}z^2$ deriuari poſſunt. Caeterum loco filorum ſiue horizontalium ſiue verticalium filum alio quocunque modo diſpoſitum hunc in vſum adhiberi poſſet, modo angulus, quem hoc filum cum filo verticali conſtituit, cognitus habeatur; nam ſi hic angulus dicatur ε, erit $\eta = \varepsilon \pm \zeta$, ideoque cognitis angulis ε, ζ, innoteſcet angulus η.

§. 7. In praecedente diſſertatione §. 23. obſeruauimus, formulam $\text{ſin.}\ \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\text{ſin.}\ c}{\text{ſin.}\ a.\ \text{coſ.}\ \zeta}$ proxime ad veritatem accedere, quando angulus ζ non nimis eſt magnus; et ſi a ponatur 67°, hanc formulam vsque ad valorem anguli $\zeta = 78°$, non niſi in 9″ errores inducere. Quare ſi de tranſitu per filum verticale ſermo eſt, concludimus, obſeruationem eo tutiores ſuppeditare concluſiones, quo propius ad meridiem

diem inſtituta fuerit, ob angulum ζ eo acutiorem, quo propius circulus verticalis Z S ad Meridianum accedit, ideoque nouum hinc prodit argumentum, vt huiusmodi obſeruatio, quam prope ad meridiem fieri poſſit, inſtituatur. Interim tamen propter defectum formulae errores ſenſibiles extimeſcendi non ſunt, niſi pro caſibus vbi ζ valorem 78° maiorem ſortitur, qui caſus rarius obueniunt.

§. 8. Sin vero de tranſitu per filum horizontale agatur, facile perſpicitur, pro hoc caſu angulum ζ eo euadere maiorem, quo propius circulus P O ad Meridianum accedit, ideoque formulam ſin. $\frac{1}{2} a = \frac{\text{ſin.}\, c}{\text{ſin.}\, a.\ \text{cyſ.}\, \zeta}$, eo minus fere exactam, quo propius ad tranſitum per Meridianum obſeruatio inſtituta eſt, cui inſuper accedit, quod in huiusmodi obſeruationibus prope Meridianum inſtitutis, altitudo Solis non niſi variatione lentiſſima afficiatur, ita vt errores inſignes in ipſis obſeruationibus vix ac ne vix quidem euitare liceat. Has igitur obſeruationes eo tempore inſtituere quam maxime conducet, quo angulus azimuthalis P Z S recto aequetur, quo etiam id commodi obtinemus, vt error in altitudine commiſſus in arcu P Z vix vllam producat variationem. Praeterea cum inuenerimus §. 3. $d z = d \eta$ ſin. a ſin. Φ, intelligitur, errorem vnius minuti primi in angulo parallactico nondum aeque magnum errorem in eleuatione poli producere.

§. 9. Vt applicatio problematis propoſiti ad caſus obuenientes eo melius fieri poſſit, eam exemplo quodam illuſtrare conueniet. Sit igitur pro tranſitu per circulum verticalem, tempus tranſitus $3' = 180''$, exiſten-

re $PO = 67° 20'$, $ZS = 69°. 12'$ et diameter Solis $= 2c = 31'. 31''$, hinc fiet $\frac{1}{2}\alpha = 22'. 30''$, ex quo, ob $\text{tang.}\, x = \frac{\text{ſin.}\, c}{\text{coſ.}\, a\, \text{ſin.}\, \frac{1}{2}\alpha}$, inuenitur $x = 61°. 10'. 44''$, hinc

$$v - x = 69°. 12'. 0'' - 61°. 10'. 44'' = 8°. 1'. 16'',$$

ideoque ob

$$\text{coſ.}\, z = \frac{\text{coſ.}\, a.\, \text{coſ.}\, (v - x)}{\text{coſ.}\, x}, \text{ erit } z = 37°. 40'. 2'',$$

et eleuatio Poli $= 52°. 19'. 58''$. Nunc ſi ponamus in tempore tranſitus $\frac{8}{10}$ ſcrupulis ſecundis fuiſſe aberratum, ita vt hoc tempus ſtatui debeat $179'', 2$, fiet $\frac{1}{2}\alpha = 22', 24''$, hinc $x = 61°. 17'. 13''$, $v - x = 7°. 54'. 47''$ et $z = 37°. 23'. 30''$, vnde eleuatio Poli $52°. 36'. 30''$, differentia a priori concluſione ad 16 minuta cum dimidio, exſurgente. Hoc igitur exemplo comprobatur, methodum hoc problemate propoſitam inveniendi eleuationem Poli, concluſiones non niſi valde dubias ſuppeditare, id quod facile patebit, ſi perpendatur, quam inſignem influxum leuiuſculi errores in obſeruando tempore tranſitus habeant ad immutandum valorem anguli parallactici. Quia enim eſt

$$\text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\text{ſin.}\, c}{\text{ſin.}\, a\, \text{coſ.}\, \eta}, \text{ fiet } d\alpha\, \text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{2\, d\eta\, \text{ſin.}\, c\, \text{ſin.}\, \eta}{\text{ſin.}\, a\, \text{coſ.}\, \eta^2},$$

ſupra autem inuenimus eſſe $dz = d\eta\, \text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, \Phi$, quare erit

$$dz = \frac{d\alpha}{2\, \text{ſin.}\, c} \cdot \frac{\text{ſin.}\, a^2\, \text{coſ.}\, \eta^2 \cdot \text{ſin.}\, \Phi}{\text{ſin.}\, \eta} = \frac{d\alpha.\, \text{ſin.}\, c}{2\, \text{ſin.}\, \frac{1}{2}\alpha^2} \cdot \frac{\text{ſin.}\, \Phi}{\text{ſin.}\, \eta}$$

$$= \frac{d\alpha}{2\, \text{ſin.}\, c} \cdot \frac{\text{ſin.}\, a^2\, \text{ſin.}\, v\, \text{coſ.}\, \eta^2}{\text{ſin.}\, z}.$$

Minima variatio proinde in dz ex $d\alpha$ oriunda ibi erit, vbi $\text{ſin.}\, v\, \text{coſ.}\, \eta^2$ fit minimum, ſiquidem heic z pro conſtanti haberi poteſt. Hinc fiet

$+ dv$

$$+ dv\,\text{coſ.}\,v\,\text{coſ.}\,\eta^2 = 2\,d\eta\,\text{ſin.}\,v\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\eta,$$ ſeu
$$dv\,\text{cot.}\,v = 2\,d\eta\,\text{tang.}\,\eta.$$

Iam vero ob

$$\text{coſ.}\,z = \text{coſ.}\,a\,\text{coſ.}\,v + \text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,v\,\text{coſ.}\,\eta,$$

fiet:

$$dv\,(-\,\text{ſin.}\,v\,\text{coſ.}\,a + \text{ſin.}\,a\,\text{coſ.}\,v\,\text{coſ.}\,\eta)$$
$$-\,d\eta\,\text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,v\,\text{ſin.}\,\eta = 0,$$

et cum ſit $\text{coſ.}\,a\,\text{ſin.}\,v - \text{ſin.}\,a\,\text{coſ.}\,v\,\text{coſ.}\,\eta = \text{cot.}\,\theta\,\text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,\eta$, fiet $dv\,\text{cot.}\,\theta + d\eta\,\text{ſin.}\,v = 0$, hincque

$$\text{coſ.}\,v = \frac{2\,d\eta\,\text{ſin.}\,v.\,\text{tang.}\,\eta}{dv} = -\,2\,\text{cot.}\,\theta\,\text{tang.}\,\eta,$$

ex quo per varias ſubſtitutiones tandem elicietur

$$-\,\frac{\text{coſ.}\,\Phi}{\text{coſ.}\,\theta} = \frac{1 + \text{ſin.}\,\eta^2}{\text{coſ.}\,\eta}.$$

§. 10. Statuamus nunc, vt in exemplo a Celeb. *Lyons* allato, tranſitum per filum horizontale fuiſſe obſeruatum, exiſtente

$$c = 16'\,18'',3,\ \tfrac{1}{2}\alpha = 39'.\,45'',\ \ PS = 113^\circ.\,27'.\,57'',$$

et $ZS = 85^\circ.\,0'.\,0''$, hinc fiet ang. $\zeta = 90 - \eta = 26^\circ.\,33'\,46''$, tumque obtinebitur arcus $PZ = 38^\circ.\,29'.\,48$, et eleuatio poli $= 51^\circ.\,30'.\,12''$. Iam ſi ſupponatur in obſeruando errorem vnius minuti ſecundi eſſe commiſſum, ita vt ſit

$$\tfrac{1}{2}\alpha = 39'.\,52'',5,\ \text{fiet}\ \zeta = 26^\circ.\,28'.\,24'',$$

hincque $PZ = 38^\circ.\,26'.\,16''$, et eleuatio poli $= 51^\circ.\,33'.\,46''$, vbi iam quidem multo minor variatio prodit, quam in caſu praecedenti. Cum tamen et hic error ſatis ſenſibilis ſit, liquet, methodum propoſitam non niſi iis in caſibus adhiberi poſſe, vbi ſufficit eleuationem poli prope cognoviſſe.

 §. 11.

§. 11. Cum exemplo modo propoſito altitudo Solis non aſſumta ſit niſi 5°, intelligitur, pro huiusmodi caſu refractionem non ſolum ad altitudinem Solis immutandam valere, ſed etiam propter eandem angulum parallacticum Solis immutari. Vt igitur pro huiusmodi caſu verus valor latitudinis loci eruatur, ſequenti modo rationes ſubducendae erunt. Sit Z S circulus verticalis, vbi verus locus centri Solis ſupponatur S, per refractionem autem correctus *s*, et ducantur circuli declinationis P S, P *s*: tum primum ex obſeruato tranſitu imaginis Solis per filum ſiue verticale ſeu horizontale et cognito arcu P S, quaeratur angulus parallacticus Z S P, tumque ob cognitum arcum S *s*, propter effectum refractionis dabitur S U $= S\,s$ coſ. z S Φ, hincque P *s* = P S − S U. Tum vero denuo, ſi ex obſeruata duratione tranſitus et arcu P *s*, quaeratur angulus P *s* Z, ex reſolutione trianguli Z *s* P inuenietur valor arcus Z P ſaltem proxime verus.

§. 12. In problemate hucusque conſiderato, praeter declinationem Solis et angulum parallacticum, altitudinem Solis cognitam ſuppoſuimus, ex quibus cognitis latitudinem loci inuenire oportuit. Verum iam et aliud proponi poteſt problema, quo ex datis declinatione Solis et angulo parallactico, modo ſupra allato inueſtigando, nec non tempore vero obſeruationis, quaeratur eleuatio poli, quod eo reuenit, vt in triangulo Z S P, ex datis binis angulis Z P S, Z S P et latere P S, inueniatur Z P. Erit vero, vt ex doctrina triangulorum ſphaericorum conſtat

$$\text{cot.}\, z = \frac{\text{coſ.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\Phi + \text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,a}{\text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,a} = \frac{\text{cot.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\Phi}{\text{ſin.}\,a} + \text{cot.}\,a\,\text{coſ.}\,\Phi,$$

deſigna-

deſignantibus, vt antea, z, a, arcus PZ, PA, et Φ, η, angulos ZPS, ZSP.

§. 13. Si pro hoc problemate quaerantur variationes, quae in valorem ipſius Z deriuantur, propter errores in aeſtimandis angulis η, Φ, commiſſos, obtinebimus primum

$$\frac{-dz}{\text{ſin. } z^2} = \frac{-d\eta \,\text{ſin. } \Phi}{\text{ſin. } a \,\text{ſin. } \eta}, \text{ ſeu } dz = \frac{d\eta \,\text{ſin. } \Phi \,\text{ſin. } z^2}{\text{ſin. } a \,\text{ſin. } \eta^2} = \frac{d\eta \,\text{ſin. } v}{\text{ſin. } \theta},$$

tumque

$$\frac{-dz}{\text{ſin. } z^2} = d\Phi \left(\frac{\text{coſ. } \eta . \text{coſ. } \Phi}{\text{ſin. } a} - \text{cot. } a \,\text{ſin. } \Phi\right) = \frac{-d\Phi \,\text{coſ. } \theta}{\text{ſin. } a \,\text{ſin. } \eta},$$

hincque

$$dz = \frac{d\Phi \,\text{coſ. } \theta \,\text{ſin. } z^2}{\text{ſin. } a \,\text{ſin. } \eta} = d\Phi . \text{ cot. } \theta \text{ ſin. } z,$$

vbi quidem intelligitur, pro ang. $\theta = 90°$, minimos errores in valorem ipſius z, ex erroribus in valore ipſius Φ commiſſis, induci.

RÉFLEXIONS
SUR LES PRINCIPALES METHODES DE CORRIGER LES DISTANCES APPARENTES DE LA LUNE À UNE ÉTOILE, RÉLATIVEMENT AUX EFFETS DE LA RÉFRACTION ET DE LA PARALLAXE.

par
NICOLAS FUSS.

Les obſervations des diſtances de la Lune à une étoile fourniſſent, de l'aveu de pluſieurs Aſtronomes du premier rang, le meilleur moyen pour déterminer la longitude en mer. La préférence qu'ils donnent à cette méthode, lorsqu'on peut l'employer, ſur toutes les autres, dont on peut ſe ſervir pour cette importante recherche, eſt fondée principalement ſur les raiſons ſuivantes: 1°) Qu'elle ne demande pas un Horizon extrémement clair & terminé; que par conſéquent on peut 2°) ſe contenter de connoître à quelques minutes près la hauteur de l'étoile & du centre de la Lune; 3°) qu'elle ne dépend ni de la latitude de l'obſervateur ni de la déclinaiſon de la

la Lune, ni d'aucun autre élément, dont les erreurs influent conſidérablement dans la détermination de la longitude, & qu'il eſt pourtant ſi difficile d'éviter en mer; 4°) qu'elle n'exige que la ſeule diſtance obſervée avec quelque préciſion & ne ſuppoſe pas 5°) des calculs auſſi longs que bien d'autres.

La ſeule difficulté dans l'emploi de cette méthode conſiſte à déterminer l'effet combiné de la réfraction qui élève tous les obiets, & de la Parallaxe qui diminue la hauteur de la Lune. Car ce n'eſt qu'après avoir dégagé la diſtance obſervée de cette double inégalité, qu'on parvient à la diſtance vraie qui, comparée à celle qu'on trouve moyennant les Éphémérides pour un autre Méridien fixe, donne la différence en temps & la longitude cherchée du lieu de l'obſervation.

Pour écarter cette difficulté quantité d'Aſtronomes ſe ſont occupés de la recherche de cette correction qu'il faut apporter aux diſtances obſervées. M. *Maskelyne*, après ſon retour de l'Isle de Ste. Hélène, où ce célèbre Aſtronome avoit eu l'occaſion de faire uſage en allant & en revenant de cette méthode avec le plus grand ſuccès, n'eut rien de plus preſſé que de la recommender comme la plus exacte à tous les marins, & d'en faciliter le calcul par des préceptes auſſi nouveaux qu'ingénieux. Depuis ce temps-là on n'a ceſſé de multiplier les méthodes de déterminer l'effet de la réfraction & de la Parallaxe; les unes ſont recommendables par des formules élégantes, les autres par des tables ſubſidiaires toutes calculées pour la

commo-

commodité de ceux qui veulent ſe ſervir de la méthode des diſtances pour la recherche de la Longitude. (*) On ne doit donc plus être embarraſſé actuellement, que ſur le choix à faire parmi cette quantité de méthodes, dont les unes ſont ou plus expéditives ou plus exactes que les autres.

Les réflexions ſuivantes m'ont paru pouvoir contribuer à faciliter ce choix par la réduction de toutes les formules, produites pour la diſtance vraie, à deux ſeulement, qui ſe déduiſent de la double Solution du Problème énoncé de la manière ſuivante:

Ayant obſervé: 1°) *la hauteur du Centre de la Lune*; 2°) *la hauteur d'une étoile fixe & 3°) la diſtance de l'étoile au Centre de la Lune, trouver la diſtance vraie, dégagée de l'effet de la réfraction & de la Parallaxe.*

Car je ferai voir que toutes les Solutions de ce Problème qui ont paru jusqu'ici, ou du moins les principales, quelques différentes qu'elles paroiſſent au premier coup d'oeil, ſe réduiſent facilement aux deux ſuivantes, dont la première n'eſt qu'approchante & peut donner dans bien des cas des réſultats fort erronnés; l'autre eſt directe & rigoureuſe. En comparant enſuite chaque formule

(*) Le bureau anglois pour les Longitudes a même fait exécuter d'après le plan de M. Maskelyne & la méthode de M. Lyons une ſuite précieuſe de tables, propres à abrèger le Calcul de ces corrections, & dignes par le travail étonnant qu'elles ont couté, des vues généreuſes & patriotiques de cette compagnie reſpectable.

mule avec l'une ou l'autre de ces deux Solutions, on ſera en état de juger de la commodité de ſon calcul & de ſon degré d'exactitude. Voici les Solutions:

Solution par approximation.

Soit A B un arc de l'horizon, Z le zénith de l'obſervateur, L le lieu obſervé du centre de la Lune, S le lieu obſervé de l'étoile. Menés par ces points L & S & par le zénith Z les arcs verticaux Z L A & Z S B. Soit enſuite le lieu vrai du centre de la Lune en l & celui de l'étoile en s; tirons les arcs L S et $l\,s$ & nommons les élémens qui entreront dans le calcul, de la manière ſuivante: Tab. XI. Fig. 3.

La hauteur apparente de ☽, ou l'arc A L $= h$
La hauteur apparente de ✱, ou l'arc B S $= h'$
La diſtance apparente de ☽ & ✱, ou l'arc L S $= d$
La diſtance vraie de ☽ & ✱, ou l'arc $l\,s = d'$
La réfraction pour la hauteur de la Lune $= r$
La réfraction pour la hauteur de l'étoile $= r'$
La parallaxe horizontale de la Lune $= \pi$
La parallaxe de hauteur de la Lune $= \pi'$.

Maintenant, puisque l'arc L l eſt le double effet de la parallaxe de la Lune qui abaiſſe ſon lieu obſervé & de la réfraction qui l'élève, il y aura L $l = \pi$ coſ. $h - r$, ce que nous nommerons δ, pour avoir L $l = \delta = \pi' - r$. Enſuite S s ſera l'effet de la réfraction qui élève l'étoile, & partant S $s = r'$. Enfin $l\,s$ eſt la diſtance vraie qu'il s'agit de trouver.

Traçons pour cet effet, du point d'interſection O pris pour centre, les petits arcs $l\lambda$ & $S\sigma$, & puiſque les angles LOl & SOs ne ſauroient être bien conſidérables, nous regarderons les arcs Ol & $O\lambda$ comme égaux entre-eux, auſſi bien que OS & $O\sigma$, pour avoir $Ol = OL - L\lambda$ & $Os = OS + s\sigma$; d'où l'on obtient la diſtance vraie $ls = d' = Ol + Os = OL + OS - L\lambda + s\sigma$, ou bien, à cauſe de $OL + OS = d$, il y aura $ls = d' = d - L\lambda + s\sigma$.

Conſidérons maintenant les triangles $Ll\lambda$ & $Ss\sigma$ qui, à cauſe de leur petiteſſe, pourront être regardés comme plans & rectangles, & qui nous fourniront conſéquemment.

$$L\lambda = Ll.\ \text{coſ.}\ lL\lambda = Ll.\ \text{coſ.}\ ZLS$$

$$s\sigma = Ss.\ \text{coſ.}\ Ss\sigma = Ss.\ \text{coſ.}\ ZSL$$

ce qui étant ſubſtitué dans l'expreſſion précédente pour d', donnera la vraie diſtance cherchée:

$$ls = d' = d - Ll.\ \text{coſ.}\ ZLS + Ss.\ \text{coſ.}\ ZSL.$$

Enfin, en conſiderant le triangle ZLS, où l'on connoît les trois côtés $ZL = 90° - h$; $ZS = 90° - h'$ & $LS = d$, on trouve par les formules connues de Trigonométrie ſphérique

$$\text{coſ.}\ ZLS = \text{ſin.}\ h'\ \text{ſec.}\ h\ \text{coſec.}\ d - \text{tang.}\ h\ \text{cot.}\ d$$

$$\text{coſ.}\ ZSL = \text{ſin.}\ h\ \text{ſec.}\ h'\ \text{coſec.}\ d - \text{tang.}\ h'\ \text{cot.}\ d.$$

En ſubſtituant donc au lieu de coſ. ZLS & coſ. ZSL ces valeurs, & mettant les quantités δ & r' à la place de Ll & de Ss, on trouve pour d' l'expreſſion ſuivante:

$d' =$

$$d' = d - \delta \text{ ſin. } b' \text{ ſec. } b \text{ coſec. } d + \delta \text{ tang. } b \text{ cot. } d$$
$$+ r' \text{ ſin. } b \text{ ſec. } b' \text{ coſec. } d - r' \text{ tang. } b' \text{ cot. } d.$$

Solution rigoureuſe.

Gardons toutes les dénominations précédentes & conſidérons d'abord le triangle ZLS, où nous connoiſſons les arcs $ZL = 90° - b$; $ZS = 90° - b'$ et $LS = d$, d'où l'on trouve l'angle au zénith $LZS = \zeta$ par l'expreſſion: Tab. XI. Fig. 4.

$$\text{coſ. } \zeta = \text{ſec. } b \text{ ſec. } b' \text{ coſ. } d - \text{tang. } b \text{ tang. } b'$$

ce qui étant trouvé, on aura par le triangle Zls, où l'on connoît l'angle $lZs = \zeta$, & les côtés

$$Zl = 90° - (b + \delta) \text{ \& } Zs = 90° - (b' - r'),$$

le coſinus de la vraie diſtance:

$$\text{coſ. } ls = \text{coſ. } d' = \text{ſin. } (b + \delta) \text{ ſin. } (b' - r')$$
$$+ \text{coſ. } \zeta \text{ coſ. } (b + \delta) \text{ ſin. } (b' - r').$$

Avant que de comparer, moyennant la conſidération d'un cas particulier, la facilité du calcul de la première de nos deux formules avec l'exactitude de la ſeconde, il ſera bon de faire voir la liaiſon qui ſubſiſte entre l'une & l'autre. Pour cet effet je mettrai dans la dernière expreſſion $d' = d + \omega$, pour avoir

$$\text{coſ. } d' = \text{coſ. } d - \omega \text{ ſin. } d,$$

& en regardant δ & r comme très petits par rapport à b & b', on pourra mettre de la même façon

$$\text{ſin.} (b + \delta) = \text{ſin.} b + \delta \text{ coſ.} b; \quad \text{coſ.} (b + \delta) = \text{coſ.} b - \delta \text{ ſin.} b$$
$$\text{ſin.} (b' - r') + \text{ſin.} b' - r' \text{ coſ.} b'; \quad \text{coſ.} (b' - r') = \text{coſ.} b' + r' \text{ ſin.} b'$$

& il y aura en négligeant le produit δr:

$$\text{ſin.}(h+\delta)\,\text{ſin.}(h'-r') = \text{ſin.}\,h\,\text{ſin.}\,h' + \delta\,\text{ſin.}\,h'\,\text{coſ.}\,h - r'\,\text{ſin.}\,h\,\text{coſ.}\,h';$$

$$\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}(h+\delta)\,\text{coſ.}(h'-r') = \text{coſ.}\,d - \frac{\delta\,\text{ſin.}\,h\,\text{coſ.}\,d}{\text{coſ.}\,h} + \frac{r'\,\text{ſin.}\,h'\,\text{coſ.}\,d}{\text{coſ.}\,h'} - \text{ſin.}\,h\,\text{ſin.}\,h' + \frac{\delta\,\text{ſin.}\,h^2\,\text{ſin.}\,h'}{\text{coſ.}\,h} - \frac{r'\,\text{ſin.}\,h\,\text{ſin.}\,h'^2}{\text{coſ.}\,h'}$$

ce qui étant ſubſtitué dans la dernière expreſſion pour coſ. d', fournit celle qui ſuit:

$$\text{coſ.}\,d - \omega\,\text{ſin.}\,d = \text{ſin.}\,h\,\text{ſin.}\,h' + \delta\,\text{ſin.}\,h'\,\text{coſ.}\,h - r'\,\text{ſin.}\,h\,\text{coſ.}\,h' + \text{coſ.}\,d - \frac{\delta\,\text{ſin.}\,h\,\text{coſ.}\,d}{\text{coſ.}\,h} + \frac{r'\,\text{ſin.}\,h'\,\text{coſ.}\,d}{\text{coſ.}\,h'} - \text{ſin.}\,h\,\text{ſin.}\,h' + \frac{\delta\,\text{ſin.}\,h^2\,\text{ſin.}\,h'}{\text{coſ.}\,h} - \frac{r'\,\text{ſin.}\,h\,\text{ſin.}\,h'^2}{\text{coſ.}\,h'}.$$

Or : $\delta\,\text{ſin.}\,h'\,\text{coſ.}\,h - \frac{\delta\,\text{ſin.}\,h\,\text{coſ.}\,d}{\text{coſ.}\,h} + \frac{\delta\,\text{ſin.}\,h^2\,\text{ſin.}\,h'}{\text{coſ.}\,h} = \frac{\delta\,\text{ſin.}\,h' - \delta\,\text{coſ.}\,d\,\text{ſin.}\,h}{\text{coſ.}\,h}$,

& $-r'\,\text{ſin.}\,h\,\text{coſ.}\,h' + \frac{r'\,\text{ſin.}\,h'\,\text{coſ.}\,d}{\text{coſ.}\,h'} - \frac{r'\,\text{ſin.}\,h\,\text{ſin.}\,h'^2}{\text{coſ.}\,h'} = -\frac{r'\,\text{ſin.}\,h + r'\,\text{coſ.}\,d\,\text{ſin.}\,h'}{\text{coſ.}\,h'}$.

Donc

$$\omega = \frac{-\delta\,\text{ſin.}\,h'}{\text{coſ.}\,h\,\text{ſin.}\,d} + \frac{\delta\,\text{ſin.}\,h\,\text{coſ.}\,d}{\text{coſ.}\,h\,\text{ſin.}\,d} + \frac{r'\,\text{ſin.}\,h}{\text{coſ.}\,h'\,\text{ſin.}\,d} - \frac{r'\,\text{ſin.}\,h'\,\text{coſ.}\,d}{\text{coſ.}\,h'\,\text{ſin.}\,d},$$

ce qui convient parfaitement avec l'expreſſion que nous a fourni la première Solution.

Cette réduction de la formule rigoureuſe à l'approximation précédente fait voir en même temps, & mieux que les ſuppoſitions immédiatement employées, qu'il doit être bien des cas, où l'expreſſion approchante peut s'écarter très ſenſiblement de la vérité. Pour le faire ſentir d'avantage on n'a qu'à calculer un cas particulier d'après l'une & l'autre de ces expreſſions.

Exemple.

Soit la hauteur obſervée du centre de la Lune $h = 20°, 9'$; la hauteur obſervée d'une étoile fixe

$h' =$

$h' = 12^\circ\, 27'$; la diſtance apparente de l'une à l'autre $d = 38^\circ, 22', 17''$; la Parallaxe horizontale $\pi = 57', 24'' = 3444''$; & il y aura

$$r = 2', 34''; \; r' = 4', 14''; \; \pi' = 3233'' \;\&\; \delta = 3079''.$$

Calcul pour l'expreſſion:

$$d' = d - \delta\,\text{ſin.}\,h'\,\text{ſec.}\,h\,\text{coſec.}\,d + \delta\,\text{tang.}\,h\,\text{cot.}\,d$$
$$+ r'\,\text{ſin.}\,h\,\text{ſec.}\,h'\,\text{coſec.}\,d - r'\,\text{tang.}\,h'\,\text{cot.}\,d$$

$l\,\delta = 3{,}48841$	$l\,\delta = 3{,}48841$	$l\,r' = 2{,}40483$	$l\,r' = 2{,}40483$
$l\,\text{ſin.}\,h' = 9{,}33362$	$l\,\text{tg.}\,h = 9{,}56459$	$l\,\text{ſin.}\,h = 9{,}53716$	$l\,\text{tg.}\,h' = 9{,}34396$
$l\,\text{ſec.}\,h = 0{,}02743$	$l\,\text{cot.}\,d = 0{,}10140$	$l\,\text{ſec.}\,h' = 0{,}01033$	$l\,\text{cot.}\,d = 0{,}10140$
$l\,\text{coſec.}\,d = 0{,}20708$	$l\,\text{II} = 3{,}15440$	$l\,\text{coſec.}\,d = 0{,}20708$	$l\,\text{IV} = 1{,}85019$
$l\,\text{I} = 3{,}05654$		$l\,\text{III} = 2{,}15940$	

Donc $-\text{I} + \text{II} + \text{III} - \text{IV} = 361'',3 = 6', 1'',3$ & partant $d' = 38^\circ, 28', 18'',3$.

Calcul pour l'expreſſion:

$\text{coſ.}\,d' = \text{ſin.}\,(h+\delta)\,\text{ſin.}\,(h'-r') + \text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,(h+\delta)\,\text{coſ.}\,(h'-r')$;
où $h+\delta = 21^\circ, 0', 19''$; $h'-r' = 12^\circ, 22', 46''$ &
$\text{coſ.}\,\zeta = \text{ſec.}\,h\,\text{ſec.}\,h'\,\text{coſ.}\,d - \text{tang.}\,h\,\text{tang.}\,h'$

$l\,\text{ſec.}\,h = 0{,}0274297$	$l\,\text{tang.}\,h = 9{,}5645925$	$+0{,}8552288$
$l\,\text{ſec.}\,h' = 0{,}0103346$	$l\,\text{tang.}\,h' = 9{,}3439583$	$-0{,}0810123$
$l\,\text{coſ.}\,d = 9{,}8943180$	$8{,}9085508$	$0{,}7742165$
$9{,}9320823$		

$l\,\text{ſin.}\,(h+\delta) = 9{,}5544333$	$l\,\text{coſ.}\,(h+\delta) = 9{,}9701364$	$0{,}07584710$
$l\,\text{ſin.}\,(h'-r') = 9{,}3311942$	$l\,\text{coſ}\,(h'-r') = 9{,}9897831$	$0{,}70596300$
$8{,}8856275$	$l\,\text{coſ.}\,\zeta = 9{,}8888625$	$0{,}78181010$
	$9{,}8487820$	

 Donc

Donc coſ. $d' = 0,7828101$ & $d' = 38°, 28', 53'', 1$
Par la formule précédente $d' = 38, 28, 18, 3$

Erreur de l'approximation $= 34'', 8$

Sans cette erreur, beaucoup trop conſidérable pour être tolérée dans quelque cas que ce ſoit, il n'y auroit pas à balancer ſur le choix de ces deux formules, la précédente étant exempte des interpolations qu'il faut faire dans l'autre pour les ſecondes des hauteurs corrigées & de la diſtance apparente, puiſqu'il ſuffit de prendre les logarithmes, quoiqu'en plus grand nombre, jusqu'à cinq chiffres décimaux. Il n'y aura même que des cas extrêmement rares, où l'on puiſſe s'en ſervir avec aſſés de confiance ſans l'emploi de quelques corrections, qui en rendent le calcul conſidérablement plus prolixe. Je parlerai de ces corrections après avoir expoſé la méthode de M. *Lyons* par laquelle je vais commencer à parcourir celles qui ſont venues à ma connoiſſance.

Solution de M. Lyons. (*)

M. Lyons détermine ſéparément l'effet de la réfraction et celui de la Parallaxe. Pour le premier il conſidère le triangle Z L S, où il y a ſuivant mes denominations $ZL = 90° - h$; $ZS = 90° - h'$; $LS = d$ et partant:

Tab. XI Fig. 5.

$$\text{coſ. } ZLS = \frac{\text{ſin. } h' - \text{coſ. } d \text{ ſin. } h}{\text{ſin. } d \text{ coſ. } h} \quad \text{et}$$

$$\text{coſ. } ZSL = \frac{\text{ſin. } h - \text{coſ. } d \text{ ſin. } h'}{\text{ſin. } d \text{ coſ. } h'}.$$

Or

(*) Tables to be uſed with the Aſtronomical and Nautical Ephemeris. London 1766. pag. 44.

Or puiſque les angles $Z\,L'\,S'$ et $Z\,S'\,L'$ ne différent pas ſenſiblement de $Z\,L\,S$ et $Z\,S\,L$ et que les arcs $L\,L'$ et $S\,S'$ ſont l'effet de la réfraction en hauteur, que j'ai déſignée par r et r', en abaiſſant de L et S ſur la diſtance corrigée à l'égard de la réfraction $L'\,S'$ les arcs perpendiculaires $L\,\lambda$ et $S\,\sigma$, il y aura $L'\,S' = d + L'\,\lambda + S'\,\sigma$. Donc, à cauſe de $L'\,\lambda = r \text{ coſ. } Z\,L\,S$ et $S'\,\sigma = r' \text{ coſ. } Z\,S\,L$, la diſtance corrigée de l'effet de la réfraction ſera

$$L'\,S' = d + r \text{ coſ. } Z\,L\,S + r' \text{ coſ. } Z\,S\,L.$$

Pour l'effet de la Parallaxe $L\,\lambda$, en mettant la Parallaxe de hauteur $L\,l = \pi \text{ coſ. } h = \pi'$, la correction de la Parallaxe $L\,\lambda$ ſera $L\,l \text{ coſ. } Z\,L\,S = \pi' \text{ coſ. } Z\,L\,S$, ce qui étant ſouſtrait de l'expreſſion précédente pour $L'\,S'$, à cauſe de $\pi' - r = \delta$, laiſſe Tab. XI. Fig. 6.

$$d' = d - \delta \text{ coſ. } Z\,L\,S + r' \text{ coſ. } Z\,S\,L \text{ ou bien}$$

$$d' = d - \frac{\delta \text{ ſin. } h'}{\text{coſ. } h \text{ ſin. } d} + \frac{\delta \text{ ſin. } h \text{ coſ. } d}{\text{coſ. } h \text{ ſin. } d} + \frac{r' \text{ ſin. } h}{\text{coſ. } h' \text{ ſin. } d} - \frac{r' \text{ ſin. } h' \text{ coſ. } d}{\text{coſ. } h' \text{ ſin. } d},$$

comme nous l'avions trouvé par la première ſolution.

Remarques.

M. Lyons paroit avoir preféré cette ſolution approchante à la ſolution rigoureuſe pour les belles transformations ſimplificatives que les formules ſeparées pour les deux effets de la réfraction & de la Parallaxe admettent dans pluſieurs cas, & pour la facilité qu'elle offre, d'en abreger le calcul par des tables ſubſidiaires. Auſſi doit-on rendre juſtice à ſon adreſſe à remplir l'un & l'autre de ces objets.

Il préſente l'expreſſion pour l'effet de la réfraction $r \text{ coſ. } Z\,L\,S + r' \text{ coſ. } Z\,S\,L$ ſous cette forme:

coſec

$$\text{coſec. } d\left(\frac{r'\,\text{ſin. } h}{\text{coſ. } h'} + \frac{r\,\text{ſin. } h'}{\text{coſ. } h}\right) - \text{cot. } d\,(r'\,\text{tang. } h' + r\,\text{tang. } h)$$

& il donne dans une table les logarithmes du facteur $\frac{r'\,\text{ſin. } h}{\text{coſ. } h'} + \frac{r\,\text{ſin. } h'}{\text{coſ. } h}$. Enſuite il obſerve à l'égard du ſecond membre cot. $d\,(r'\,\text{tang. } h' + r\,\text{tang. } h)$ que la plus grande des deux hauteurs obſervées, par exemple h, ne ſauroit gueres être moindre de 10°, et que par conſéquent le terme r tag. h peut être regardé comme conſtant & égal à la réfraction pour la hauteur de 45°, égale à e, ce qui donne pour le ſecond membre de l'expreſſion précédente cot. $d\,(r'\,\text{tang. } h' + e)$, formule pour laquelle M. Lyons a calculé une ſeconde table, accompagnée de deux autres ſupplémentaires, qui renferment les corrections qu'il faut apporter aux nombres de l'autre, pour les cas qui exigent plus de préciſion.

L'expreſſion pour l'effet total de la réfraction devient encore plus commode, ſi l'on ſuppoſe la réfraction en hauteur proportionelle à la tangente de la diſtance au zénith, pour les hauteurs au-delà de 10°. M. *Lyons* met en conſéquence $r = e \text{ cot. } h$ & $r' = e \text{ cot. } h'$, & à cauſe de cot. $d =$ coſec. $d -$ tang. $\frac{1}{2} d$, il obtient cette expreſſion pour l'effet total de réfraction:

$$2\,e \text{ tang. } \tfrac{1}{2}\,d + \frac{e\,\text{coſec. } d\,(\text{ſin. } h - \text{ſin. } h')^2}{\text{ſin. } h\,\text{ſin. } h'}.$$

Formule dont le ſecond membre ne ſurpaſſe gueres 8 ſecondes pour les cas, où les deux hauteurs ſurpaſſent 50 degrés. Quant au premier membre $2\,e$ tag. $\frac{1}{2}\,d$ ſes valeurs ſe trouvent calculées dans une troiſième table. Et ſi l'on demande plus de juſteſſe, il y a deux autres tables, l'une pour le membre $\frac{e\,(\text{ſin. } h - \text{ſin. } h')^2}{\text{ſin. } h\,\text{ſin. } h'}$ & l'autre pour

la

la multiplication de cette quantité par la coſécante de la diſtance, ce qui fournit la juſte valeur du ſecond membre.

Outre ces ſept tables pour le calcul de l'effet de la réfraction, il y en a quatre encore pour l'effet de la Parallaxe qui eſt π' coſ. Z L S $=$ π coſ. h coſ. Z L S, ou bien π ſin. h' coſec. $d - \pi$ ſin. h cot. d; ſavoir deux tables pour l'effet de la Parallaxe du Soleil, lorsqu'on ſe ſert de cet aſtre au-lieu d'une étoile, une troiſième table très étendue de logarithmes proportionaux de la Parallaxe horizontale, & une quatrième contenant les produits des ſinus verſes de la Parallaxe en hauteur & en diſtance dans la cotangente de la diſtance convertie en ſecondes.

On voit par ce détail que M. *Lyons* n'a rien épargné pour rendre la formule approchante auſſi traitable & auſſi exacte que poſſible. Mais malgré les artifices employés pour la rendre plus commode, & malgré le travail ingrat & ennuiant de tant de tables qui devoient en abreger le calcul, ſa méthode me paroit toujours très compliquée, par l'emploi de tant de tables & par les diſtinctions qu'il y a à faire dans les differens cas qui peuvent ſe préſenter. En calculant ſéparément, comme fait Mr. *Lyons*, l'effet de la Parallaxe, on gagne à la vérité par l'emploi des hauteurs & de la diſtance corrigée, mais on perd d'un autre côté cet avantage, avec celui des tables ſubſidiaires, lorsqu'il y en a, puisque ſon calcul demande presque la moitié du temps qu'on emploieroit pour la formule directe, & qu'il faut le corriger encore des erreurs de l'approximation, ſans quoi le réſultat eſt presque toujours ſenſiblement fautif.

 Ces

Ces corrections doivent monter pour le cas particulier que nous avons examiné ci-deſſus à $34''$, 8, ſi le reſultat doit être égal à celui qui a été fourni par la ſolution directe. Voyons ce qu'elles nous fourniront en déduiſant une formule plus approchante de la ſolution rigoureuſe.

Pour cet effet il faut remarquer d'abord par rapport à la ſuppoſition principale de la ſolution par approximation, ſavoir l'angle $S s \sigma = Z S L$, qu'elle ne ſauroit avoir lieu, que lorsque la diſtance apparente L S eſt très grande, auſſi bien que la hauteur de l'étoile B S, puisque pour les petites diſtances les angles $L O l$ & $S O s$ ne ſont pas, comme nous avons ſuppoſé, très petits, ni les arcs $O l$ & $O \lambda$, $O S$ & $O \sigma$ égaux entre-eux; & pour les petites hauteurs, l'arc $S s$, effet de la réfraction, eſt trop grand, pour qu'on puiſſe mettre ſans erreur $s \sigma = S s$ coſ. Z S L.

Les mêmes réflexions ſe préſentent encore plus naturellement, en jettant les yeux ſur le calcul que nous avons fait ci-deſſus, pour déduire l'expreſſion approchante de la juſte valeur; attendu que ſi δ n'eſt pas extrêmement petit par rapport à b; r' par rapport à b' & ω par rapport à d, les poſitions de la transformation mentionnée ne ſont plus admiſſibles; car au-lieu de coſ. $\delta = 1$, coſ. $\omega = 1$ & coſ. $r' = 1$ il faudra avoir égard aux ſecondes puiſſances & mettre coſ. $\delta = 1 - \frac{1}{2}\delta^2$, coſ. $\omega = 1 - \frac{1}{2}\omega^2$ & coſ. $r' = 1 - \frac{1}{2} r'^2$, pour avoir

ſin.

$$\sin.(b+\delta) = \sin. b + \delta \cos. b - \tfrac{1}{2}\delta\delta \sin. b$$
$$\sin.(b'-r') = \sin. b' - r' \cos. b' - \tfrac{1}{2} r' r' \sin. b'$$
$$\cos.(b+\delta) = \cos. b - \delta \sin. b - \tfrac{1}{2}\delta\delta \cos. b$$
$$\cos.(b'-r') = \cos. b' + r' \sin. b' - \tfrac{1}{2} r' r' \cos. b'$$
$$\cos.(d+\omega) = \cos. d - \omega \sin. d - \tfrac{1}{2}\omega\omega \cos. d$$

ce qui donne en négligeant les troiſiémes dimenſions:

$$\sin.(b+\delta)\sin.(b'-r') = \sin. b \sin. b' + \delta \sin. b' \cos. b - \tfrac{1}{2}\delta^2 \sin. b \sin. b' - r' \sin. b \cos. b' - \delta r' \cos. b \cos. b' - \tfrac{1}{2} r' r' \sin. b \sin. b'$$

$$\cos.\zeta \cos.(b+\delta)\cos.(b'-r') = \left\{ \begin{array}{l} +\cos. d - \frac{\delta \sin. b \cos. d}{\cos. b} - \frac{1}{2}\delta^2 \cos. d \\ -\sin. b \sin. b' + \frac{\delta \sin. b^2 \sin. b'}{\cos. b} + \frac{1}{2}\delta^2 \sin. b \sin. b' \\ + \frac{r' \sin. b' \cos. d}{\cos. b'} - \frac{\delta r' \sin. b \sin. b' \cos. d}{\cos. b \cos. b'} - \frac{1}{2} r' r' \cos. d \\ - \frac{r' \sin. b'^2 \sin. b}{\cos. b'} + \frac{\delta r' \sin. b^2 \sin. b'}{\cos. b \cos. b'} + \frac{1}{2} r' r' \sin. b \sin. b' \end{array} \right\}$$

& après avoir ſubſtitué ces valeurs dans l'expreſſion

$$\cos. d' = \sin.(b+\delta)\sin.(b'-r') + \cos.\zeta \cos.(b+\delta)\cos(b'-r'),$$

on obtient celle-ci:

$$\omega = d' - d = \Delta + \tfrac{1}{2}(\delta^2 + r'^2 - \omega^2)\cot. d + \frac{\delta r (\cos. b^2 - \sin. b'^2 + \sin. b \sin. b' \cos. d)}{\cos. b \cos. b'},$$

où Δ exprime la valeur trouvée par l'approximation précédente.

En calculant cette nouvelle correction:

$$\tfrac{1}{2}(\delta\delta + r' r' - \omega\omega)\cot. d + \frac{\delta r' (\cos. b^2 - \sin. b'^2 + \sin. b \sin. b' \cos. d)}{\cos. b \cos. b'}$$

il ſuffit de prendre pour ω la valeur telle qu'elle nait après avoir ajouté le terme $\frac{1}{2}\delta\delta \cot. d$ à la valeur Δ; & pour convertir tout en ſecondes, il faut ajouter au logarithme de chaque terme le logarithme de $\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{648000''}$ qui eſt 4, 68557, π étant ici la demie périphérie du cercle dont le rayon $= 1$.

Cal-

Calculons ſéparément chaque terme de cette correction, pour être en état de diſtinguer ceux qui par leur petiteſſe peuvent en général être negligés:

$l\frac{1}{2}\delta\delta = 6,6758$	$l\frac{1}{2}r'r' = 4,5086$	$l\frac{1}{2}\omega\omega = 4,8811$
$l\cot. d = 10,0998$	$l\cot. d = 0,0998$	$l\cot. d = 0,0998$
$l$conſt. $= 4,6856$	$l$conſt. $= 4,6856$	$l$conſt. $= 4,6856$
1,4612	9,2940	(−)9,6665

coſ. $h = 0,9391$		$l$coſ.$h = 9,9727$	$l$tg.$h = 9,5634$
ſin. $h' = 0,2144$		$l$coſ.$h' = 9,9898$	$l$tg.$h' = 9,3415$
$\cos h + \sin. h' = 1,1535$	log. $= 0,0620$	9,9625	$l$coſ.$d = 9,8938$
$\cos. h - \sin. h' = 0,7247$	log. $= 9,8601$	9,9221	8,7987
$l(\cos^2 h - \sin^2 h') = 9,9221$		9,9596	

corr. IV. pars I. $= 0,9113$	$l\delta = 3,4884$	corr. 1 $= 28'',92$
—— —— II. $= 0,0629$	$lr = 2,4048$	—— 2 $= 0,20$
0,9742	4,6856	—— 3 $= -0,46$
	9,9886	—— 4 $= 3,69$
	0,5674	32,35

Ainſi la ſomme des corrections eſt $= 32'',4$, qui ajoutées à $38°, 28', 18'', 3$ donnent $d' = 38°, 28', 50'', 7$. Or la ſolution rigoureuſe donne $d' = 38, 28, 53, 1$ deſorte qu'après toutes ces corrections laborieuſes on s'écarte encore de la vraie valeur de $2'', 4$. Cette petite différence n'eſt pas à la vérité un objet, ſur lequel on doive s'appéſantir pour en chercher ſcrupuleuſement l'origine ou pour trouver les moyens de la réparer: vu que les variations dans les tables de réfraction & plus ou moins d'incertitude ſur la diſtance obſervée, en peuvent produire

duire d'auſſi grandes. (*) Mais pourquoi ſe ſervir d'une méthode qui, pour être tant-ſoit-peu exacte demande beaucoup plus de temps que ne fait celle qui conduit d'abord à la juſte valeur? Ce n'eſt pas qu'on ne puiſſe donner une forme beaucoup plus commode à cette correction, & en rejetter même, comme on voit par cet exemple, quelques termes, tels que $\frac{1}{2} r' r' \cot. d$ pour les hauteurs conſidérables, & $\frac{1}{2} \omega \omega \cot. d$ pour les petites diſtances; mais il ne vaut pas la peine de s'y arrêter, d'autant que cela méne à des diſtinctions néceſſaires de différens cas, lesquelles, ſans augmenter proprement la longueur des calculs, peuvent en multiplier au moins les préparatifs, ce qui revient au même. Le réſultat de tout cela me paroît être, que la méthode directe mérite d'être miſe en uſage préferablement à l'autre dans tous les cas, où l'on n'oſe rejetter toutes les dernières corrections, ou dans lesquels on ne peut ſe contenter tout au plus du terme premier $\frac{1}{2} \delta \delta \cot. d$, qui ſera toujours aſſés grand, lorsque d eſt moindre que 100°.

Pour donner un exemple, où l'on peut employer la formule approchante ſans correction, ſoit

$$h = 18°, 47', 27''; \; h' = 56°, 16', 50'';$$
$$d = 101°, 46', 43''; \; \delta = 51', 19'' \; \& \; r' = 34'',$$

& il y aura par la méthode directe $d' = 100°, 57', 31, 7$. L'approximation

$$d' = d - \delta \cos. ZLS + r' \cos. ZSL$$

donne

$d' = 100°, 57', 31'', 9$, à cauſe de angles

(*) Pour le cas préſent les tables citées donnent par exemple 38', 28', 56'' pour la vraie diſtance.

$$ZLS = 14^\circ,\ 25',\ 58'' \ \& \ ZSL = 25^\circ,\ 9',\ 14'',$$

deſorte que l'erreur de l'approximation n'eſt ici que de $0'',2$.

Dans tous les cas qui admettent cette approximation

$$d' = d - \delta \operatorname{coſ.} ZLS + r' \operatorname{coſ.} ZSL,$$

on peut auſſi avec avantage commencer par calculer les angles ZLS & ZSL, moyennant les formules connues:

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2} ZLS = \sqrt{\frac{\text{ſin.}(s-h')\,\text{coſ.}\,s}{\text{coſ.}(s-d)\,\text{ſin.}(s-h)}}\ \&$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2} ZSL = \sqrt{\frac{\text{ſin.}(s-h)\,\text{coſ.}\,s}{\text{coſ.}(s-d)\,\text{ſin.}(s-h')}}$$

où $s = \frac{h + h' + d}{2}$. Car on n'a qu'à chercher deux valeurs

$$A = \text{coſ.}\,s\ \text{ſec.}(s-d)\ \ \&\ \ B = \text{ſin.}(s-h')\ \text{coſec.}(s-h),$$

on aura facilement

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2} ZLS = \sqrt{AB}\ \ \&\ \ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2} ZSL = \sqrt{\tfrac{A}{B}}$$

& enfin

$$d' = d - \delta \operatorname{coſ.} ZLS + r' \operatorname{coſ.} ZSL.$$

Ce procédé qui eſt effectivement très expéditif, a été propoſé par M. *Lexell.* (*) Le notre n'en diffère que par l'emploi immédiat des hauteurs obſervées, qui nous diſpenſe de les réduire aux diſtances du zénith.

Je vais parler encore de deux autres méthodes, réductibles à notre première expreſſion & très ingénieuſes. Elles n'ont d'autre défaut que celui de ne faire qu' appro-

(*) Dans le mémoire: *Obſeruationes circa methodum inueniendi longitudinem loci ex obſeruata diſtantia Lunae a ſtella fixa*, inſéré dans le ſecond volume des Actes de l'Académie p. 355.

procher de la ſolution approchante, tout comme celle de M. *Lyons*, ſavoir en faiſant vſage de ſes tables; car ſa ſolution convient, comme nous avons vu, avec la notre. L'une de ces méthodes appartient à M. *Maskelyne*, l'autre à M. *Witckell* & elles ſe trouvent toutes deux dans l'Almanac nautique pour l'année 1772.

Méthode de M. Maskelyne (*).

Pour la détermination de l'effet de la réfraction (**) M. *Maskelyne* enſeigne à calculer un arc A, dont la tangente eſt $=$ tang. $\frac{b-b'}{2}$ cot. $\frac{b+b'}{2}$, & un autre B, dont la tangente eſt $=$ tang. A cot. $\frac{1}{2}d$, après quoi l'effet total de la réfraction eſt ſelon lui $\frac{2x \text{ tang. } 2\text{A}}{\text{ſin. } 2\text{B}}$, la lettre x marquant la quantité de réfraction pour la hauteur de 45°.

Remarques.

Réduiſons premièrement cette expreſſion aux ſimples arcs A & B, & à cauſe de

$$\text{tang. } 2\text{A} = \frac{2 \text{ tang. A}}{1 - \text{tang. A}^2} \quad \& \quad \text{ſin. } 2\text{B} = \frac{2 \text{ tang. B}}{1 + \text{tang. B}^2},$$

nous aurons

$$\frac{2x \text{ tang. } 2\text{A}}{\text{ſin. } 2\text{B}} = 2x \cdot \frac{\text{tang. A}}{\text{tang. B}} \times \frac{1 + \text{tang. B}^2}{1 - \text{tang. A}^2}$$

$$= \frac{2x}{\text{cot. } \frac{1}{2}d} \cdot \frac{1 + \text{tang B}^2}{1 - \text{tang. A}^2}.$$

Enſuite parceque

$$\text{tang. A} = \frac{\text{ſin. } b - \text{ſin. } b'}{\text{ſin. } b + \text{ſin. } b'} \quad \& \text{ tang. B} = \frac{\text{ſin. } b - \text{ſin. } b'}{\text{ſin. } b + \text{ſin. } b'} \sqrt{\frac{1 + \text{coſ. } d}{1 - \text{coſ. } d}}$$

on

(*) V. *A correct and eaſy Method of clearing the apparent diſtance of the Mond from a Stear:* &c. *Nautical Almanac* 1772. Elle y ſert de ſupplément.

(**) Je me borne à conſiderer la formule qu'il donne pour ce ſeul effet, comme étant préférablement remarquable par ſon élégance.

on trouve

$$1 - \text{tang. } A^2 = \frac{4\, \text{ſin. } h\ \text{ſin. } h'}{(\text{ſin. } h + \text{ſin. } h)^2} \quad \&$$

$$1 + \text{tang. } B^2 = \frac{\text{ſin. } h^2 + \text{ſin. } h'^2 - 2\, \text{ſin. } h\ \text{ſin. } h' \text{ coſ. } d}{2\, \text{ſin. } h\ \text{ſin. } h' (1 - \text{coſ. } d)}$$

donc

$$\frac{2\, x \text{ tang. } 2\, A}{\text{ſin. } 2\, B} = \frac{x}{\text{cot. } \frac{1}{2} d (1 - \text{coſ. } d)} \times \frac{\text{ſin. } h^2 + \text{ſin. } h'^2 - 2\, \text{ſin. } h\ \text{ſin. } h' \text{ coſ. } d}{\text{ſin. } h\ \text{ſin. } h'}$$

ou bien à cauſe de $\text{cot. } \frac{1}{2} d (1 - \text{coſ. } d) = \text{ſin. } d$

$$\frac{2\, x \text{ tang. } 2\, A}{\text{ſin. } 2\, B} = \frac{x (\text{ſin. } h - \text{ſin. } h' \text{ coſ. } d)}{\text{ſin. } h'\ \text{ſin. } d} + \frac{x (\text{ſin. } h' - \text{ſin. } h \text{ coſ. } d)}{\text{ſin. } h\ \text{ſin. } d}$$

Or M. *Maskelyne* a ſuppoſé que les effets de la réfraction en hauteur ſont $r = x \text{ cot. } h$ & $r' = x \text{ cot. } h'$; ainſi il faudra mettre dans l'expreſſion précédente $x = r \text{ tang. } h$ & $x = r' \text{ tang. } h'$, ce qui étant fait on obtient pour l'effet total de la réfraction en diſtance

$$\frac{r (\text{ſin. } h' - \text{ſin. } h \text{ coſ. } d)}{\text{coſ. } h\ \text{ſin. } d} + \frac{r' (\text{ſin. } h - \text{ſin. } h' \text{ coſ. } d)}{\text{coſ. } h'\ \text{ſin. } d},$$

expreſſion qui convient avec celle de M. *Lyons* & avec la partie de la notre qui renferme la réfraction.

M. *Maskelyne* a facilité le calcul de cette formule par trois tables ſubſidiaires, qui ſervent en même temps pour la détermination de l'effet de la Parallaxe. Mais il faut bien remarquer que cette belle expreſſion n'eſt qu'une approximation à l'approximation même, puiſque pour les hauteurs moindres de 20° on s'écarte de plus en plus de la juſte valeur en mettant

$$r = x \text{ cot. } h \quad \& \quad r' = x \text{ cot. } h'.$$

Les préceptes de M. *Maskelyne* renferment bien les corrections néceſſaires pour approcher d'avantage en cas de beſoin; mais le calcul, augmenté par là, détruit l'avantage

tage de l'élégance de la correction principale; & celui qu'on eſt obligé de faire encore ſéparément pour l'effet de la Parallaxe, rend cette méthode plus laborieuſe que la plûpart des autres.

Méthode de M. Witchell (*).

Comme M. *Witchell*, dans l'ouvrage cité, ne donne ni l'expreſſion analytique ni l'Analyſe même, ſur laquelle ſes préceptes ſont fondés, & que ſa méthode me paroît très ingénieuſe, je crois bien faire, en repréſentant les corrections qu'il propoſe, par des formules. La liaiſon avec notre formule approchée leur ſervira en même temps de démonſtration.

M. *Witchell* calcule un arc A, dont la tangente eſt égale à

$$\cot.\frac{h+h'}{2}\tang.\frac{h-h'}{2}\cot.\tfrac{1}{2}d,$$

& il prétend que la premiere correction à apporter à la diſtance obſervée eſt égale à la réfraction correſpondante à une hauteur $= 90° - (\frac{1}{2}d + A)$, & que la ſeconde correction ſera $= -\delta\,\tang.h\,\tang.(\frac{1}{2}d - A)$,

$$\text{Or }\tang.(\tfrac{1}{2}d - A) = \frac{\tang.\frac{1}{2}d - \tang.A}{1 + \tang.\frac{1}{2}d\,\tang.A},$$

ou bien

$$\tang.(\tfrac{1}{2}d - A) = \frac{\tang.\frac{1}{2}d - \tang.\frac{h-h'}{2}\cot.\frac{h+h'}{2}\cot.\frac{1}{2}d}{1 + \tang.\frac{h-h'}{2}\cot.\frac{h+h'}{2}}.$$

Le

(*) Supplément du *Nautical Almanac* année 1772. pag. 18.

Le numérateur de cette expreſſion ſe réduit à

$$\frac{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}d}{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}d} - \frac{\text{ſin.}\,b - \text{ſin.}\,b'}{\text{ſin.}\,b + \text{ſin.}\,b'} \times \frac{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}d}{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}d},$$

ou bien à

$$\frac{\text{ſin.}\,b' - \text{ſin.}\,b\,\text{coſ.}\,d}{\frac{1}{2}(\text{ſin.}\,b + \text{ſin.}\,b')\,\text{ſin.}\,d};$$

& le dénominateur

$1 + \frac{\text{ſin.}\,b - \text{ſin.}\,b'}{\text{ſin.}\,b + \text{ſin.}\,b'}$ prend cette forme:

$\frac{2\,\text{ſin.}\,b}{\text{ſin.}\,b + \text{ſin.}\,b'}$; d'où l'on tire

$$\text{tang.}\,(\tfrac{1}{2}d - \text{A}) = \frac{\text{ſin.}\,b' - \text{ſin.}\,b\,\text{coſ.}\,d}{\text{ſin.}\,b\,\text{ſin.}\,d},$$

ce qui fournit pour la ſeconde correction:

$$-\delta\,\text{tang.}\,b\,\text{tang.}\,(\tfrac{1}{2}d - \text{A}) = -\frac{\delta\,(\text{ſin.}\,b' - \text{ſin.}\,b\,\text{coſ.}\,d)}{\text{coſ.}\,b\,\text{ſin.}\,d}.$$

Enſuite M. *Witchell* ſuppoſe auſſi que les réfractions ſont en raiſon des tangentes des diſtances au zénith, ſavoir $r' : \text{cot.}\,b'$; donc l'analogie

$$\text{cot.}\,b' : r' = \text{cot.}\,(90° - (\tfrac{1}{2}d + \text{A}))$$

donnera la réfraction pour la hauteur $90° - (\frac{1}{2}d + \text{A})$, qui ſera $\frac{r'\,\text{tang.}\,(\frac{1}{2}d + \text{A})}{\text{cot.}\,b'}$. On trouve par des opérations ſemblables aux précédentes

$$\text{tang.}\,(\tfrac{1}{2}d + \text{A}) = \frac{\text{ſin.}\,b - \text{ſin.}\,b'\,\text{coſ.}\,d}{\text{ſin.}\,b'\,\text{ſin.}\,d},$$

ce qui étant ſubſtitué fournit la première correction égale à $\frac{r'(\text{ſin.}\,b - \text{ſin.}\,b'\,\text{coſ.}\,d)}{\text{coſ.}\,b'\,\text{ſin.}\,d}$; & la ſomme de ces deux corrections eſt égale à l'expreſſion approchante de notre premiere Solution.

Pour

Pour corriger les erreurs, qui peuvent naître de la ſuppoſition, que les réfractions ſont proportionelles aux cotangentes des hauteurs apparentes, l'auteur donne une quatrieme correction pour les cas qui peuvent l'exiger. Auſſi corrige-t-il les erreurs de l'approximation fondamentale d'une manière aſſés facile, dont l'expreſſion ne peut gueres différer de la notre pag. 323. Cette belle methode paroit avoir échappé à M. *Lexell*, qui n'en parle pas, quoiqu'elle ſoit plus facile à calculer que la précédente.

Les deux méthodes ſuivantes ſont rigoureuſement vraies: mais leurs formules ne ſont pas à beaucoup près auſſi faciles à calculer que celle de notre ſeconde Solution.

Solution de M. Dunthorne (*).

Puisqu'il y a dans le triangle Z L S Tab. XI. Fig. 4.

$$\text{coſ.}\, b\ \text{coſ.}\, b' : 1 = \text{coſ.}\, d - \text{coſ.}\,(b' - b) : \text{coſ.}\, Z$$

& dans l'autre triangle $Z\,l\,s$:

$$\text{coſ.}\,(b+\delta)\,\text{coſ.}\,(b'-r') : 1 = \text{coſ.}\, d' - \text{coſ.}\,((b'-r')-(b+\delta)) : \text{coſ.}\, Z$$

il y aura

$$\text{coſ.}\, d - \text{coſ.}\,(b'-b) = \text{coſ.}\, b\ \text{coſ.}\, b'\ \text{coſ.}\, Z \quad \&$$

$$\text{coſ.}\, d' - \text{coſ.}\,((b'-r')-(b+\delta)) = \text{coſ.}\,(b+\delta)\,\text{coſ.}\,(b'-r')\,\text{coſ.}\, Z.$$

En multipliant la premiere de ces equations par coſ. $(b+\delta)$ coſ. $(b'-r')$ & la ſeconde par coſ. b coſ. b' & prennant la difference on obtient

$$(\text{A}),\ \text{coſ.}\, b\ \text{coſ.}\, b'\,(\text{coſ.}\,((b'-r')-(b+\delta)) - \text{coſ.}\, d')$$
$$- \text{coſ.}\,(b+\delta)\,\text{coſ.}\,(b'-r')\,(\text{coſ.}\,(b'-b) - \text{coſ.}\, d) = 0.$$

Tt 2 Donc

(*) *Requiſite Tables annexed to the Nautical Almanac, pag. 66.*

Donc en prennant les logarithmus:

$$l(\text{coſ.}(h'-h)-\text{coſ.}\,d)+l\,\text{coſ.}(h+\delta)+l\,\text{coſ.}(h'-r')$$
$$=l\,\text{coſ.}\,h+l\,\text{coſ.}\,h'+l(\text{coſ.}((h'-r')-(h+\delta))-\text{coſ.}\,d').$$

Puis en mettant

$$l\,\text{coſ}\,h+l\,\text{coſ.}\,h'-l\,\text{coſ.}(h+\delta)-l\,\text{coſ.}(h'-r')=l\,m$$

il y a

$$l(\text{coſ.}((h'-r')-(h+\delta))-\text{coſ.}\,d')$$
$$=l(\text{coſ.}(h'-h)-\text{coſ.}\,d)-l\,m=l\,n;\ \text{donc}$$
$$n=\text{coſ.}((h'-r')-(h+\delta))-\text{coſ.}\,d'$$

& partant

$$\text{coſ.}\,d'=\text{coſ.}((h'-r')-(h+\delta))-n.$$

Formule dont M. *Dunthorne* a ſoulagé le calcul par des tables pour log. m & pour δ, qui ne ſont pas d'une grande reſſource & par leur peu d'étendue & par la nature de l'expreſſion.

Au reſte il eſt facile à voir que l'équation (A) ſe réduit à la ſuivante:

$$\text{coſ.}\,d'=\text{coſ.}((h'-r')-(h+\delta))-\frac{\text{coſ.}(h+\delta)\,\text{coſ.}(h'-r')\,\text{coſ.}(h'-h)}{\text{coſ.}\,h\ \text{coſ.}\,h'}$$
$$+\frac{\text{coſ.}(h+\delta)\ \text{coſ.}(h'-r')\ \text{coſ.}\,d}{\text{coſ.}\,h\ \text{coſ.}\,h'},$$

qui étant développée, en mettant

$$\frac{\text{coſ.}\ d-\text{ſin.}\,h\,\text{ſin.}\,h'}{\text{coſ.}\,h\cdot\text{coſ.}\,h'}=\text{coſ.}\,\zeta,$$

prend la forme de notre équation:

$$\text{coſ.}\,d'=\text{ſin.}(h+\delta)\,\text{ſin.}(h'-r')+\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}(h+\delta)\,\text{coſ.}(h'-r').$$

(*) Expreſſion de M. le Chevalier de Borda.

La règle de M. *de Borda* enſeigne à calculer un arc

(*) Elle ſe trouve dans la *Connoiſſance des temps* pour 1780.

arc M, dont le coſinus eſt exprimé par cette forme:

$$\sqrt{\frac{\text{coſ. } s \text{ coſ. } (s-d) \text{. coſ. } (b+\delta) \text{ coſ. } (b'-r')}{\text{coſ. } b \text{ coſ. } b' \text{ coſ.} \frac{1}{2} ((b+\delta)+(b'-r'))}},$$

pour avoir

$$\text{ſin.} \tfrac{1}{2} d' = \text{coſ.} \tfrac{1}{2} ((b+\delta)+(b'-r')) \text{ ſin. M},$$

où $s = \frac{b+b'+d}{2}$; deſorte qu'il y a

$$\text{ſin.} \tfrac{1}{2} d'^2 = \text{coſ.} \tfrac{1}{2} ((b+\delta)+(b'-r'))^2 - \frac{\text{coſ. } s \text{. coſ. } (s-d) \text{ coſ. } (b+\delta) \text{ coſ. } (b'-r')}{\text{coſ. } b \text{ coſ. } b'}.$$

Cette formule très compliquée ſe réduit à la notre de la manière ſuivante:

$$\frac{1-\text{coſ. } d'}{2} = \frac{1+\text{coſ. } ((b+\delta)+(b'-r'))}{2} - \frac{\text{coſ. } s \text{. coſ. } (s-d) \text{ coſ. } (b+\delta) \text{ coſ. } (b'-r')}{\text{coſ. } b \text{ coſ. } b'}$$

où bien

$$\text{coſ. } d' = \frac{2 \text{ coſ. } s \text{. coſ. } (s-d) \text{ coſ. } (b+\delta) \text{ coſ. } (b'-r')}{\text{coſ. } b \text{ coſ. } b'} - \text{coſ. } (b+\delta+b'-r')$$

or

$$2 \text{ coſ. } s \text{ coſ. } (s-d) = \text{coſ. } d + \text{coſ. } (2s-d) = \text{coſ. } d + \text{coſ. } (b+b')$$

donc

$$\text{coſ. } d' = \frac{(\text{coſ. } d + \text{coſ. } (b+b')) \text{ coſ. } (b+\delta) \text{ coſ. } (b'-r')}{\text{coſ. } b \text{ coſ. } b'} - \text{coſ. } (b+\delta+b'-r'),$$

& en développant

$$\text{coſ. } ((b+\delta)+(b'-r')) \text{ \& coſ. } (b+b'),$$

on obtient

$$\text{coſ. } d' = \text{ſin. } (b+\delta) \text{ ſin. } (b'-r') + \text{coſ. } \zeta \text{ coſ. } (b+\delta) \text{ coſ. } (b'-r'),$$

où

$$\text{coſ. } \zeta = \frac{\text{coſ. } d - \text{ſin. } b \text{ ſin. } b'}{\text{coſ. } b \text{ coſ. } b'}.$$

Mais on voit ſans que je le faſſe remarquer, que la dernière formule a un grand avantage ſur l'autre par ſa ſimplicité.

Nous voyons par toutes ces réflexions 1°) que les deux expreſſions:

$$d' = d - \delta\ \text{ſin.}\ h'\ \text{ſec.}\ h\ \text{coſec.}\ d + \delta\ \text{tang.}\ h\ \text{cot.}\ d$$
$$+ r'\ \text{ſin.}\ h\ \text{ſec.}\ h'\ \text{coſec.}\ d - r'\ \text{tang.}\ h'\ \text{cot.}\ d\ \ \&$$
$$\text{coſ.}\ d' = \text{ſin.}\ (h + \delta\ (\text{ſin.}\ (h' - r') + \text{coſ.}\ \zeta\ \text{coſ.}\ (h + \delta)\ \text{ſin.}\ (h' - r'),$$

ont été fondamentales pour toutes les Solutions alléguées du Probléme de la correction des diſtances apparentes de la Lune à une étoile. 2°) Que les trois méthodes de Mrs. *Maskelyne*, *Lyons* & *Witchell*, qui ont été déduites de la première de ces deux formules, quelque ingénieuſes qu'elles ſoient, n'étant que des approximations de l'approximation même, exigent quantité de corrections qui détruiſent l'avantage des belles transformations qui en font le principal mérite. 3°) Qu'elles ſont d'autant plus incertaines qu'il eſt très difficile de diſtinguer exactement les cas, où l'on doit en emploier plus ou moins. 4°) Que la méthode de M. *Lyons*, qui par la forme des tables ſubſidiaires ſe prête le plus facilement à cet examen, eſt telle, qu'il faut être bien habitué aux calculs qu'elle exige, s'ils doivent prendre moins de temps que le calcul immédiat de l'une ou l'autre des expreſſions fondamentales. 5°) Qu'il en eſt de même à plus forte raiſon des deux dernières expreſſions qui conviennent avec la Solution rigoureuſe.

Il me paroît donc que ſans qu'on ſoit obligé de ſacrifier la commodité du calcul à la juſteſſe du réſultat on ſe ſerviroit avec le plus grand avantage de la formule

$$\text{coſ.}\ d' = \text{ſin.}\ (h + \delta)\ \text{ſin.}\ (h' - r') + \text{coſ.}\ \zeta\ \text{coſ.}\ (h + \delta)\ \text{coſ.}\ (h' - r')$$

pour

pour tous les cas, où la diſtance obſervée eſt au-deſſous de 90° & de l'autre formule approchée

$$d' = d - \delta \text{ coſ. } ZLS + r' \text{ coſ. } ZSL,$$

pour les cas où cette diſtance ſurpaſſe 90°, à moins que les hauteurs ne ſoient très petites, & qu'on ne puiſſe pas négliger la correction $\frac{1}{2}(\delta - \omega)(\delta + \omega) \text{ cot. } d$; ſoit qu'on calcule cette formule immediatement de la façon aſſignée ci-deſſus, ſoit qu'on faſſe uſage de la règle de M. *Lexell.* Car je crois que le travail ſera à peu près le même pour l'une & l'autre manière.

L'excellent Mémoire de M. *Lexell*, que j'ai allégué dant la note, pag. 326. contient encore quelques expreſſions pour le ſinus & pour le coſinus de la demie diſtance vraie, d'un uſage auſſi commode que la formule

$$\text{coſ. } d' = \text{ſin. }(h + \delta) \text{ ſin. }(h' - r') + \text{coſ. } \zeta \text{ coſ. }(h + \delta) \text{ coſ. }(h' - r'),$$

dont ce célebre Académicien les a déduites. Mais je ne crois pas devoir m'y arrêter, d'autant que je n'ai rien à ajouter à ſes transformations ingénieuſes & que leur comparaiſon avec la formule fondamentale, par rapport au calcul, eſt aſſés facile par la ſeule inſpection.

Je terminerai cependant ces réflexions par une méthode qui, par ſa ſimplicité & par la facilité du calcul, doit l'emporter ſur toutes les autres, tant vraies qu'approchantes, que je connois & dont j'ai parlé jusqu'ici. Elle eſt fondée ſur la transformation ſuivante de la formule rigoureuſe:

$$\text{coſ } d' = \text{ſin. }(h + \delta) \text{ ſin. }(h' - r') + \text{coſ. } \zeta \text{ coſ. }(h + \delta) \text{ coſ. }(h' - r')$$

qui équivaut à celle-ci:

coſ.

$$\text{coſ.}\, d' = \text{ſin.}\,(h+\delta)\,\text{ſin.}\,(h'-r') + \text{coſ.}\,(h+\delta)\,\text{coſ.}\,(h'-r')\,\text{coſ.}\,\zeta$$
$$-\,\text{coſ.}\,(h+\delta)\,\text{coſ.}\,(h'-r') + \text{coſ.}\,(h+\delta)\,\text{coſ.}\,(h'-r').$$

Donc

$$\text{coſ.}\, d' = (1+\text{coſ.}\,\zeta)\,\text{coſ.}\,(h+\delta)\,\text{coſ.}\,(h'-r') - \text{coſ.}\,(h+\delta+h'-r')$$

ou bien

$$\text{coſ.}\, d' = 2\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\zeta^2\,\text{coſ.}\,(h+\delta)\,\text{coſ.}\,(h'-r') - \text{coſ.}\,(h+\delta+h'-r'),$$

où il y a, comme ou ſait par les Sphériques,

$$\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\zeta^2 = \frac{\text{ſin.}\,(90^\circ - \frac{1}{2}(h+h'-d))\,\text{ſin.}\,(90^\circ - \frac{1}{2}(h+h'+d))}{\text{ſin.}\,(90^\circ - h)\,\text{ſin.}\,(90^\circ - h')}$$

ou bien, en mettant pour abréger

$$\frac{h+h'+d}{2} = s \;\&\; h+\delta+h'-r' = \sigma$$

il y a

$$\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\zeta^2 = \text{coſ.}\,s\,\text{coſ.}\,(s-d)\,\text{ſec.}\,h\,\text{ſec.}\,h',$$

donc

$$\text{coſ}\,d' = \text{coſ.}\,s\,\text{coſ.}\,(s-d)\,\text{ſec.}\,h\,\text{ſec.}\,h'\,\text{coſ.}\,(h+\delta)\,\text{coſ.}\,(h'-r') - \text{coſ.}\,\sigma.$$

Il eſt bon de remarquer par rapport à cette expreſſion, que comme les angles h, h', $(h+\delta)$, $(h'-r')$ & $(s-d)$ ne peuvent jamais ſurpaſſer 90°, le premier membre

$$\text{coſ.}\,s\,\text{coſ.}\,(s-d)\,\text{ſec.}\,h\,\text{ſec.}\,h'\,\text{coſ.}\,(h+\delta)\,\text{coſ.}\,(h'-r'),$$

ſera toujours poſitif, à moins que s ne ſurpaſſe 90°.

Exemple.

Soit

$$h = 64^\circ, 30'; \; h' = 48^\circ, 20'; \; d = 33^\circ, 15', \pi = 55', 29''$$

& il y aura

$$s = 73^\circ, 2', 30'' \;\&\; s-d = 39^\circ, 47', 30''$$
$$h+\delta = 64^\circ, 53', 26''; \; h'-r' = 48^\circ, 19', 10''.$$

Donc

Donc

$$
\begin{array}{ll}
l\,\text{coſ.}\,s = 9,4649010 & \tfrac{1}{2}\,\text{I} = 0,22091925 \\
l\,\text{coſ.}\,(s-d) = 9,8855741 & \\
l\,\text{ſec.}\,h = 0,3660156 & \text{I} = 0,4419385 \\
l\,\text{ſec.}\,h' = 0,1773117 & \text{II} = 0,3941023 \\
l\,\text{coſ.}\,(h+\delta) = 9,6277229 & \text{coſ.}\,d' = 0,8360408 \\
l\,\text{coſ.}\,(h'-r') = 9,8228066 & d' = 33^\circ, 16', 32'' \\
l.\ \text{part.}\ \tfrac{1}{2}\,\text{I} = 9,3443319 &
\end{array}
$$

Il me paroît impoſſible de donner une forme plus commode pour l'expreſſion rigoureuſe, & comme elle ne demande que ſix logarithmes & une ſeule opération qui eſt d'en prendre la ſomme, elle peut être employée généralement dans tous les cas avec le plus grand avantage.

Quoiqu'on puiſſe raiſonnablement ſuppoſer, que ceux qui ſont dans le cas d'avoir beſoin de pareilles formules, ſoient en état de les calculer, on a coûtume pourtant de les traduire, en montrant leur uſage par des préceptes plus détaillés. Je vais faire de même à l'égard de l'expreſſion propoſée ici pour la correction des diſtances apparentes, ſavoir:

$$\text{coſ.}\,d' = 2\,\text{coſ.}\,s\,\text{coſ.}\,(s-d)\,\text{ſec.}\,h\,\text{ſec.}\,h'\,\text{coſ.}\,(h+\delta) \times \times\,\text{coſ.}\,(h'-r') - \text{coſ.}\,\sigma,$$

pour faire voir qu'elle peut être rendüe très intelligible à ceux même qui ne comprennent rien à la ſolution qui l'a fournie. Voici les préceptes qui expliqueront ſon uſage.

I. Prenez les ſix logarithmes ſuivans:

1 & 2. Du coſinus de la demie ſomme & de la demie différence des hauteurs & de la diſtance apparentes.

3 & 4. De la ſécante de la hauteur obſervée de la Lune & de l'étoile.

5 & 6. Du coſinus de la hauteur corrigée de la Lune & de l'étoile.

II. Rejettez le premier chiffre de la caractériſtique de la ſomme de ces ſix logarithmes: cherchez le nombre qui lui répond & prenez en le double.

III. Cherchez le coſinus de la ſomme des hauteurs corrigées, ou celui de ſon complément à 180°, ſi elle ſurpaſſe 90°.

IV. De ces deux nombres, trouvés par l'Art. II & III. vous prendrez ou la ſomme ou la différence, ſelon les quatre cas ſuivans:

1) Si $s < 90°$ & $\sigma < 90°$, c'eſt leur différence qu'on doit prendre, en lui donnant le ſigne $+$, lorsque le premier membre eſt le plus grand, & le ſigne $-$, lorsqu'il eſt le plus petit.

2) Si $s < 90°$ & $\sigma > 90°$, il faudra prendre la ſomme de ces nombres, qui ſera conſtamment poſitive $+$.

3) Si

3) Si $s > 90^\circ$ & $\sigma > 90^\circ$, ou prendra leur différence, qui aura le ſigne $+$, lorsque le ſecond membre ſurpaſſe le premier, & le ſigne $-$, lorsque celui-ci eſt le plus grand.

4) Si $s > 90^\circ$ & $\sigma < 90^\circ$, on prendra la ſomme, qui aura toujours le ſigne $-$.

V. Cette ſomme ou différence étant le coſinus de la vraie diſtance, on n'a qu'à chercher l'angle qui lui répond. Si elle eſt poſitive cet angle donne la diſtance corrigée de l'éffet de la réfraction & de la Parallaxe; ſi elle eſt négative, il faudra prendre ſon complément à 180°.

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE PETROPOLI HABITAE.

Auctore

STEPHANO RUMOVSKI.

Anno 1775.

Eclipſis ⊙lis die $\frac{15}{26}$ Auguſti.

Die $\frac{13}{24}$ Aug. meridies verus ex altitudinibus Solis correſpondentibus eſt - $11^{h}.\ 40^{\prime}.\ 44^{\prime\prime},5$

Die $\frac{15}{26}$ Aug. Cl. D^{nus} *Islenieff* et ego obſeruauimus finem tantum Eclipſeos Solis, quia initium illius contigit ſole ſub horizonte adhuc latente; Ille tubo Achromatico trium pedum triplici lente obiectiua praedito - - 6. 19. 20 t. h.

Ego vero tubo Gregoriano 24 pollicum 6. 19. 16

Eodem die merid. verus ex alt. ⊙lis correſpondentibus - - - 11. 37. 40,5

Hinc tempus verum finis Eclipſeos habetur

ex obſeruatione Cl. D^{ni} *Islenieff* - 6. 41. 19.

ex mea - - - - - 6. 41. 15.

Anno

Anno 1778.

Die $\frac{28\ \text{Febr.}}{11\ \text{Mart.}}$ Em. II. ſatellitis Iouis - - $9^h. 58'. 12''$ t. v.

Obſeruatio inſtituta eſt Luna non procul a Ioue remota, et tardius ſatellitem ſeſe mihi obtuliſſe exinde iudico, quod intenſiori iam, quam par eſt, fulgere videbatur lumine.

Die $\frac{9}{20}$ Mart. Em. I. ſatellitis Iouis - 11. 16. 25.

Obſeruatio bona, peracta eſt coelo ſereno.

Die $\frac{25\ \text{Mart.}}{5\ \text{April.}}$ Em. I. Satellitis Iouis - - 10. 38. 48. t. v.
Imm. IV. Satellitis - - 11. 46. 20.

Cum IV Satellites lumine iam diminuto gauderet, tam exiguo interuallo a primo ſeiunctus fuit, vt cum illo interdum cohaerere viderentur, id circo poſterior obſeruatio non eſt exacta.

Die $\frac{30\ \text{Mart.}}{10\ \text{Apr.}}$ Em. III. Satellitis Iouis.

Dubito, vtrum Satellitem videam, nam tardius illum expectaueram - - - 9. 30. 1.
Certus ſum de illius praeſentia - - 9. 30. 7.

Obſeruatio inſtituta eſt coelo ſereno, aere tranquillo, ſed Luna ſplendente.

Die $\frac{1}{12}$ April. Em. II. Satellitis.
Dubito de praeſentia Satellitis - - 9. 54. 22.
Certus ſum ſatellitem prodiiſſe - - - 9. 54. 32.

Eodem die Em. I. Satellitis.

Satelles prodit inconſpectum - -	$12^h. 35'. 20''$.
Pari lumine cum reliquis fulget - -	12. 36. 0.

Eclipſis ☉lis die $\frac{13}{24}$ Iunii.

Praecedentibus proxime Eclipſin ſolis diebus non licuit motum horologii per altitudines Solis correſpondentes explorare; interim tamen per obſeruationes die 16 et 20 Iunii captas conſtitit motum horologii ante Eclipſim aeque ac poſt Eclipſim Solis fuiſſe vniformem, conſtanter ſcilicet ſpatio diei ſolaris medii ratardaſſe $5''$; quamobrem vt in reductione temporis horologii ad tempus verum ſenſibilis error ineſſe poſſit, non facile crediderim.

Video exiguam partem diſci ſolaris Eclipſim iam eſſe paſſam - - -	$5^h. 2'. 0''$. t. v.
Finis Eclipſis exacte obſeruatus - -	6. 52. 38.

Vir Celeber. *Lexell* in diſſertatione nuper Academiae tradita plurimas obſeruationes huius Eclipſeos in aliis locis peractas ad computum more ſuo reuocauit, earumque comparationem inſtituit, inanem igitur operam facturus eſſem, ſi finem, a me obſeruatum, non niſi $7''$ ab obſeruatione Cel. *Lexell* deficientem ad calculum reuocarem. Cum vero concluſiones a Cel. *Lexell* ibidem deductae vt plurimum momentis ab illo Petropoli obſervatis innitantur, hoc ſaltem pretium obſervationi meae erit tribuendum, quod illa ad concluſiones Cel. *Lexell* confirmandas conducat.

Anno

Anno 1779.

Die $\frac{29 \text{ April}}{10 \text{ Maii}}$ Em. I. Satellitis Iouis.

Credo Satellitem ex vmbra prodire	$10^h. 10'. 21''$.
Certus ſum de eius praeſentia -	10. 10. 31.

Eclipſis Solis die $\frac{3}{14}$ Iunii.

Die $\frac{30 \text{ Maii}}{10 \text{ Iun.}}$ meridies verus ex altitudinibus Solis correſpondentibus - -	$0^h. 7'. 0'', 2$
Die $\frac{31 \text{ Maii}}{11 \text{ Iun.}}$ - - -	0. 8. 15, 8

Die $\frac{3}{14}$ Iunii.

Initium Eclipſis Solis teleſcopio Gregor. 24 poll. - - - - - - -	$10^h. 12'. 57''$t.h.
Finis eodem teleſcopio - -	11. 34. 25.
Dominus Tchernoi tubo Achromatico 3. ped.	34. 28.
Meridies verus ex altitudinibus Solis correſp.	0. 12. 9.
Hinc computo peracto tempus aſtronomicum verum initii eclipſeos die $\frac{2}{13}$ Iunii reperitur - - -	22. 0. 55.
Finis per meam obſeruationem - -	23. 22. 18.
Per obſeruationem Socii - - -	23. 22. 21.

Cum vtrumque momentum initii aeque ac finis exacte fuiſſe obſeruata mihi perſuaſus ſim, e re eſſe exiſtimaui illa ad computum reuocare. Hunc in finem aſſumta differentia meridianorum Grenouicenſis et Petropolitani $2^h. 1'. 16''$ ex Tabulis Maieri Londini editis ſequentia computaui elementa.

Temp.

Temp. ver. Gr.	19^h.	20^h.	21^h.	22^h.
Temp. med.	$18^h. 59'. 39''$.	$19^h. 59'. 39''$.	$20^h. 59'. 40''$.	$21^h. 59'. 40''$.
Long. ☉ med.	$2^s.22°.25'.12'',1$	$2^s.22°.27'.40''$.	$2^s\ 22°.30'.\ 7'',8$	$2^s\ 22°.32'.35'',8$
—— ☉ vera	2. 22. 57. 31,3	59. 54,6	2. 23. 2. 18.	2. 23. 4. 41,5
Obliqu. Eclipt.	23. 28. 8,5			
½ Diam. Solis	15. 47,5		15. 47,5	
Long. ☽ vera	2. 21. 45. 54,8	2. 22. 33. 26.	2. 23. 0,58,2	2. 23. 38 32.
Latit. ☽ Bor.	57. 24.	1. 0. 48.	1. 4. 12.	1. 7. 36.
Parall. Aequat.	61. 4,2		61. 5,8	
—— Correct.	60. 55,7		60. 57,3	
l Π	3.5629705		3.5631606	
Mot. hor. ☽ rel.	35. 7,9		35. 10,3	
Log. pro reduct. ſpat. in tempus	0. 232	4525 0.232	2671 0,231	9583

Pro initio Eclipſis.

Poſita iam ratione diametri aequatoris ad axem telluris = 201 : 200, Latitudine Petropolis 59°. 56'. 23'' pro computandis parallaxibus Lunae iuxta methodum Celeber. *Lexell* habetur diſtantia zenith veri a polo 30°. 18'. 32'' $l\varepsilon$ = 9.9983816. Tempus verum initii Eclipſis $22^h. 0'. 55''$ ad meridianum Grenouicenſem reductum et in medium conuerſum fit $19^h. 59'. 18''$ pro quo habetur:

Longitudo Solis media	- -	2^s. 22°. 27'. 40''.
Longitudo ☽ vera	- -	2. 22. 23. 13.
Latitudo ☽ Bor.	- -	1. 0. 46, 9
Parall. ☽ aequ. — parall. ☉	-	60. 56, 5
Parallaxis Longit.	- -	+ 12. 53, 7
—— Latit.	- -	— 38. 5, 3
½ Diam. ☽ apparens	- -	16. 52, 2

et

et tempus verum coniunctionis $23^h. 3'. 3''$. Denotantibus vero δ, y et π correctionibus, quas ſumma ſemidiametrorum Solis et Lunae, Latitudo Lunae et parallaxis eiusdem aequatorea admittere poſſunt, tempus coniunctionis correctum prodit $23^h. 3'. 3'' + 2,37\,\delta - 1,64\,y + 1,39\,\pi$.

Pro fine Eclipſis.

Pro tempore vero obſeruationis $23^h. 22'. 18''$. ad meridianum Grenouicenſem reducto $21^h\ 21'. 2''$. atque in medium conuerſo $21^h. 20'. 42''$ habetur.

Longitudo Solis media - -	$2^s. 22^\circ. 30'. 59'', 6$
Longitudo ☽ vera - -	2. 23. 14. 8, 2
Latitudo ☽ Bor. - -	1. 5. 23, 5
Parall. ☽ aequat. — parall. ☉ -	60. 57. 3
Parall. Longit. - -	+ 3. 18, 9
—— Latit. - -	— 36. 0, 3
½ Diam. ☽ apparens - - -	16. 53, 4

Vnde tempus verum coniunctionis deducitur $23^h. 3'. 34''$. vel per obſeruationem ſocii $23^h. 3'. 37''$. quam meae praeferendam eſſe exiſtimo; introductis vero correctionibus δ, y et π orietur expreſſio pro tempore coniunctionis:

$$23^h. 3'. 37'' - 3.89\,\delta + 3,50\,y - 1.98\,\pi$$

ſubtrahamus ab hac expreſſione prius inuentam et habebimus $34' - 6,26\,\delta + 5,14\,y - 3,37\,\pi = 0$. Cuius pars tertia (A) $11,3 - 2.09.\,\delta + 1,71\,y - 1,12\,\pi = 0$ addita ad primam expreſſionem coniunctionis praebet:

$$23^h. 3'. 14''. 3 - 0,28\,\delta + 0,07\,y + 0,27\,\pi.$$

Cum nunc correctionum δ et π limites ſint ad modum arcti, prout patet ex rei natura, variisque disquiſitioni-

bus Cel. *Lexell*, coefficiens vero ipſius y tam ſit exiguus, vt non niſi enormis in Latitudine Lunae error exiguam mutationem in ipſa expreſſione producere valeat tempus coniunctionis ad meridianum Petropolitanum prodit $23^h. 3'. 14''$ ſi ipſas obſeruationes nullis erroribus inquinatas ſtatuere velimus.

Praeter obſeruationem Petropolitanam nulla niſi Göttingae habita ad manus meas peruenit, quam ſimilem in modum ad calculum reuocaui.

Obſeruatio Göttingenſis a Celeb. *Maiero* peracta ita ſe habet:

Initium	$20^h. 9'. 55''$.
Finis	21. 23. 22.

Poſita igitur Latitudine Göttingae $51°. 31'. 54''$. Diſtantiam zenith apparentis a vero reperi $16'. 44''$, $l\varepsilon = 9.9906734$. Dein poſita Longitudine Göttingae a Grenouico $39'. 32''$. pro initio Eclipſis deduxi parallaxin Lunae Longitudinis $+ 29'. 54'', 1$. Latitudinis $- 36'. 51'', 7$. Diametrum ☽ apparentem $33'. 40'', 1$ et tempus verum coniunctionis ad meridianum Göttingenſem

$$21^h. 41'. 43'' + 2,33\,\delta - 1.59\,y + 1.79\,\pi.$$

Ex fine vero exiſtente parallaxi Longitudinis $+ 22'. 28'', 3$ parallaxi Latitudinis $- 32'. 41'', 3$ et Diametro apparente $33'. 45'', 2$ idem momentum reperitur

$$21^h. 42'. 5'' - 4,86\,\delta + 4,55\,y - 1.81\,\pi$$

ab hac expreſſione ſubtracta priori oritur

$$22'' - 7.19\,\delta + 6,14\,y - 3,60\,\pi = 0$$

cuius

cuius rurſum pars tertia

$$(B)\ 7'',3 - 2.39\,\delta + 2,05\,y - 1,20\,\pi = 0,$$

addita ad momentum coniunctionis ex initio deductum dabit idem

$$21^h.\ 41'.\ 50'' - 0,06\,\delta + 0,46\,y + 0,59\,\pi.$$

Collatis interſe momentis coniunctionum a correctionibus δ, y et π fere non pendentibus Longitudo Petropolis a meridiano Göttingenſi prodit $1^h.\ 21'.\ 24''$. Aſt cum ex aliis obſeruationibus conſtet eam eſſe $1^h.\ 21'.\ 44''$ quam proxime, neceſſum eſt vt vel Petropolitanis vel Göttingenſibus obſeruationibus error $20''$ circiter inſit. Quo appareat, vbi nam ille lateat, comparentur inter ſe momenta coniunctionis ex fine deducta, vt pote maioris praeciſionis capacia, et prodit expreſſio pro differentia meridianorum

$$1^h.\ 21'.\ 32'' + 0,97\,\delta - 1.05\,y - 0,17\,\pi$$

quae neglectis correctionibus δ et π, ſtatuendo $y = -10$ vel -12 facile ad conſenſum cum ſupra allata reducitur, cum contra ſimilis expreſſio ex initio deducta

$$1^h.\ 21'.\ 20' + 0,04\,\delta - 0,05\,y - 0,40\,\pi$$

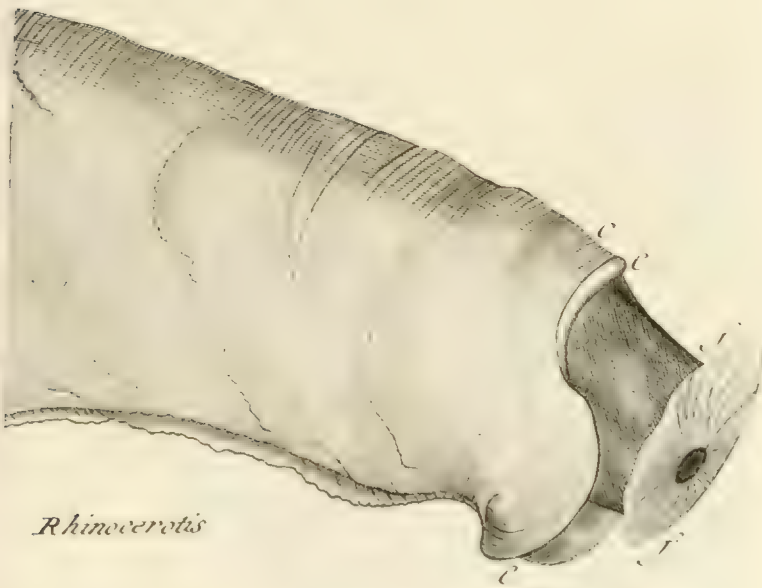
non niſi enormen ipſi y valorem tribuendo ad conſenſum reuocari poterit. Vnde apparet vel in Petropolitana vel in Göttingenſi obſeruatione initii Eclipſeos notabilem errorem eſſe commiſſum. Vtra vero peccet per obſeruationes in aliis locis peractas erit dirimendum.

Attamen obſeruationi Petropoli peractae ſequentia fauere videntur: Si obſeruatio iſta ponatur erronea, neceſſe eſt, vt initium Eclipſis $20''$ citius quam par eſt fuerit obſeruatum, quod minime probabile videtur. Dein

admiſſo hoc errore et neglecta correctione π, aequationes ſupra allatae A et B debite mutatae poſito $\gamma = -10''$ praebent $\delta = -6''$, poſito vero $y = -12''$ dant $\delta = -8''$ quam proxime; cum contra aſſumto initium Eclipſeos Göttingae $20''$ tardius eſſe obſeruatum, quod probabilius eſt, eaedem aequationes praebent $\delta = -2'', 8$ vel $\delta = -4'', 4$ prout $y = -10''$ vel $-12''$ aſſumitur, ex quo apparet vero ſimilius eſſe in obſeruatione Göttingenſi quam in Petropolitana errorem eſſe commiſſum.

Poſito iam tempore coniunctionis Solis et Lunae ſecundum Eclipticam ad meridianum Petropolitanum $23^h. 3'. 14''$, et Longitudine Petropolis a Grenouico $2^h. 1'. 16''$ tempus verum coniunctionis ad meridianum Grenouicenſem erit $21^h. 1'. 58''$, pro quo Longitudo vera ☉ et ☽ eſt $2^s. 23°. 2'. 22'', 4$ et cum Tabulae *Maieri* pro eodem temporis momento dent Longitudinem Lunae $2^s. 23°. 2'. 14''$, colligitur correctio pro Longitudine $-8'', 4$ correctio vero Latitudinis $-10''$, aut $-12''$ ſtatui poterit, donec obſeruationes in aliis locis peractae aliud quid ſuadae videantur;

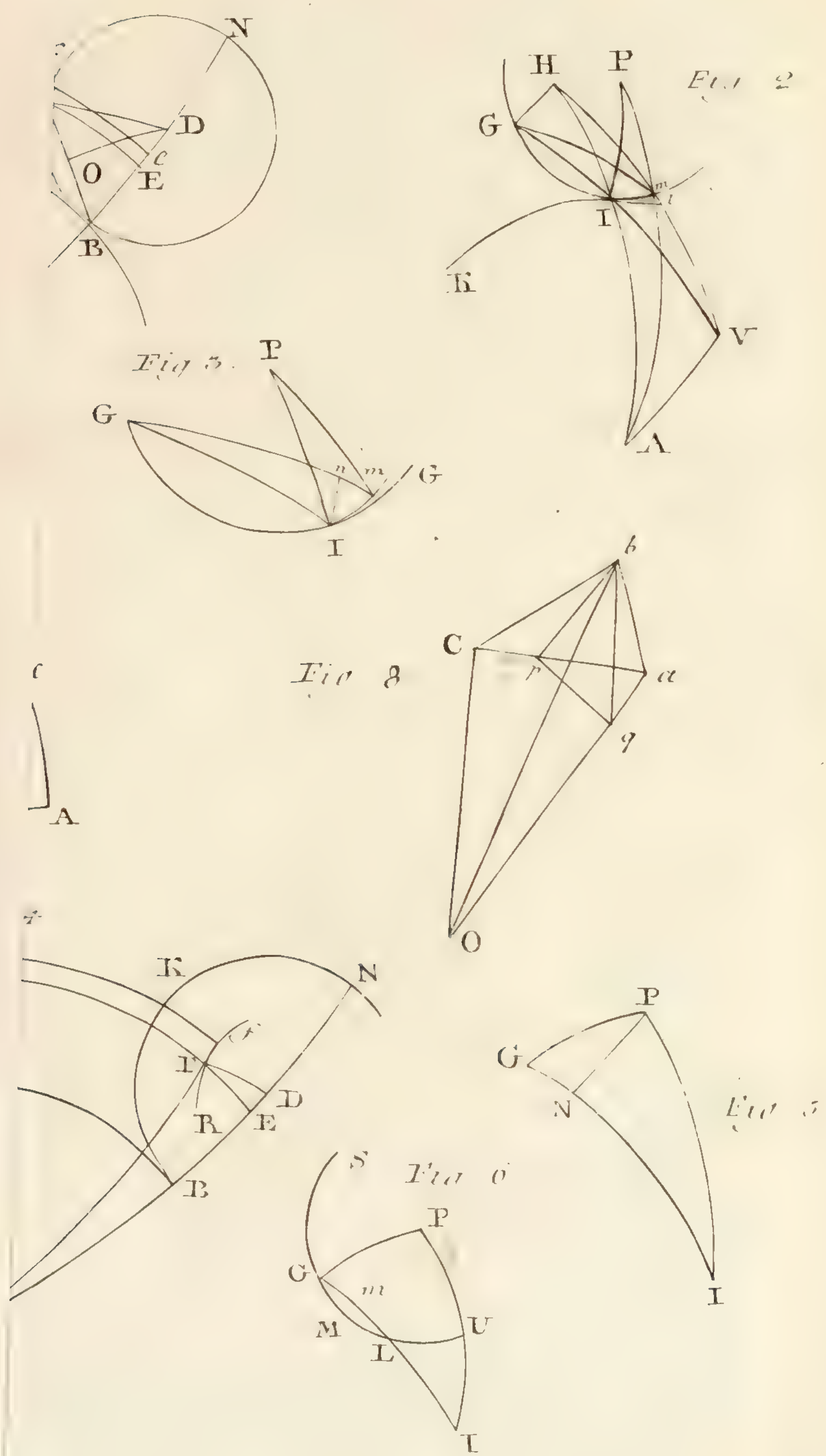
et Longitudo Gottingae a Petropoli ex fine Eclipſis $1^h. 21'. 42''$.



Rhinocerotis



Penis Rhinocerotis


N
D
O
E
B
H
P
Fig. 2
G
I
K
V
A
Fig. 3.
P
G
n
m
G
I
b
C
Fig. 8
r
a
q
O
A
K
N
D
R
E
B
P
G
N
Fig. 5
S
Fig. 6
P
G
m
M
U
L
I
I

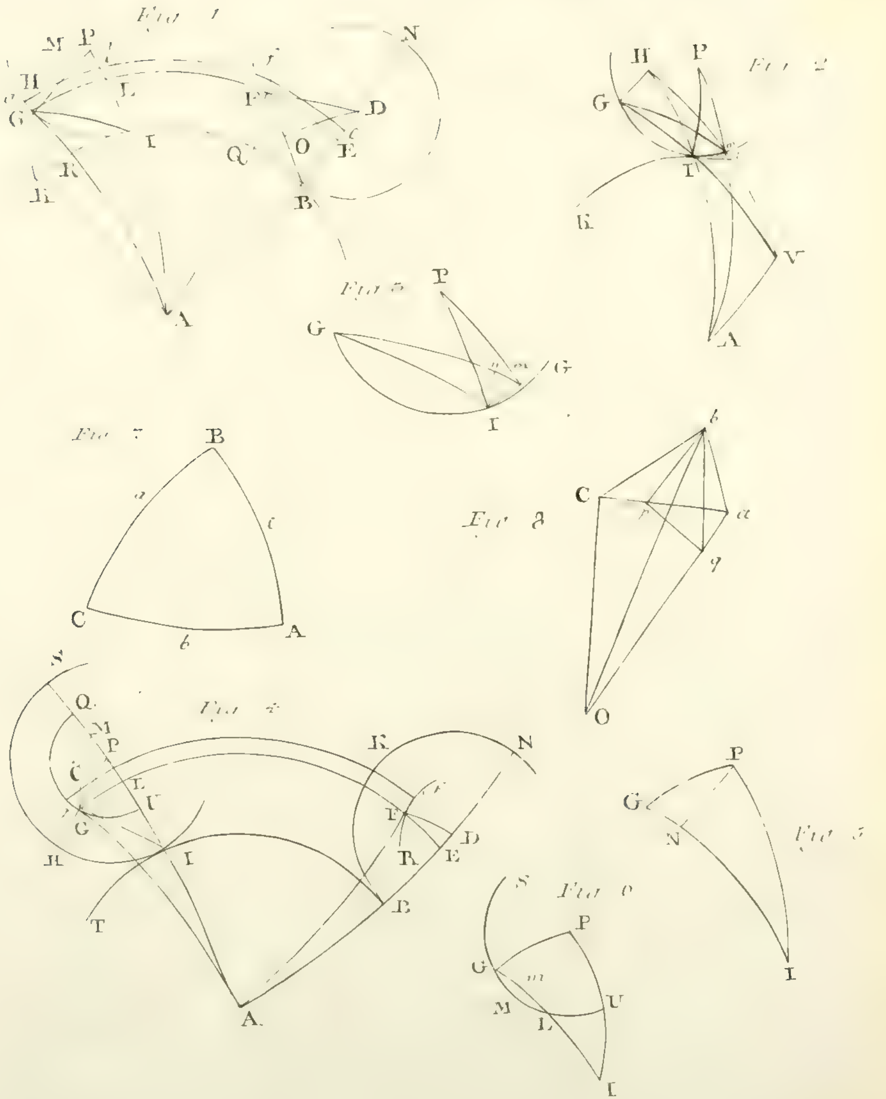


Fig . 2 .

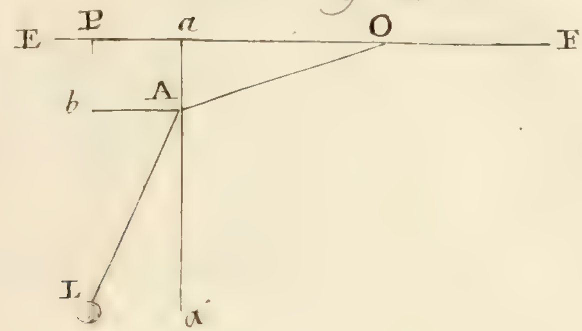


Fig . 4

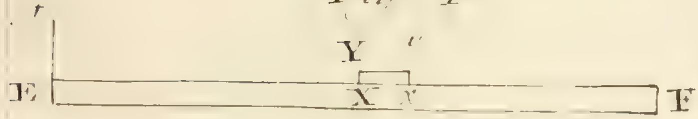


Fig . 6 .

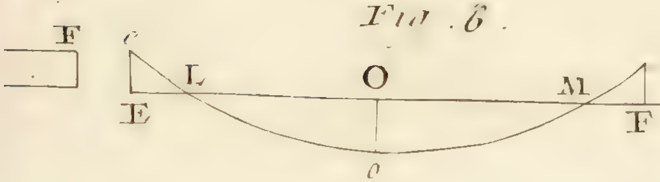


Fig. 8.

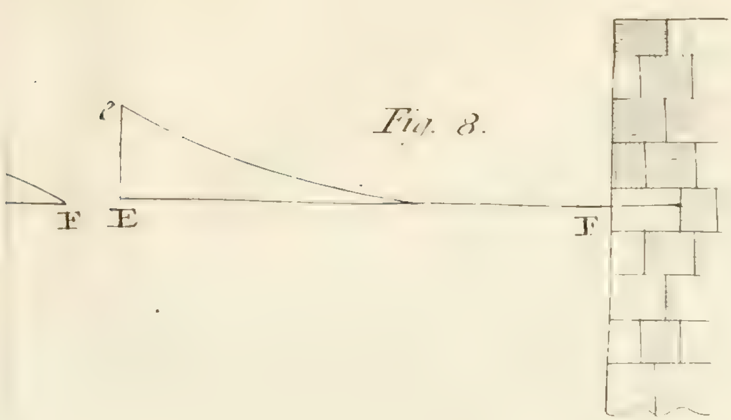


Fig. 1.

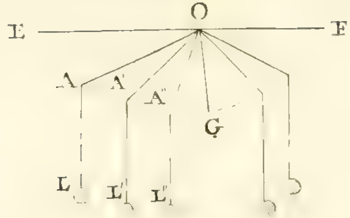
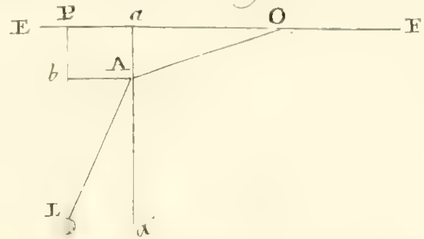


Fig. 2.



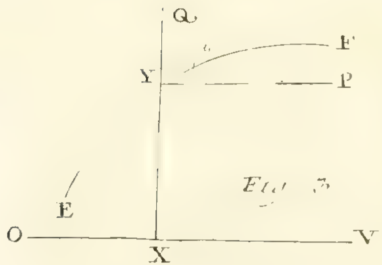


Fig. 3.

Fig. 4.

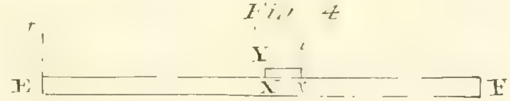


Fig. 5.

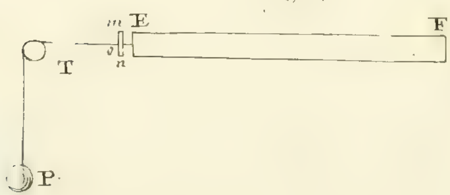


Fig. 6.

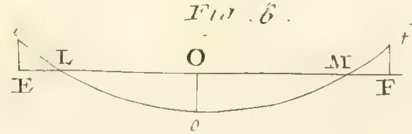


Fig. 7.

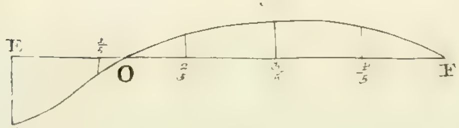
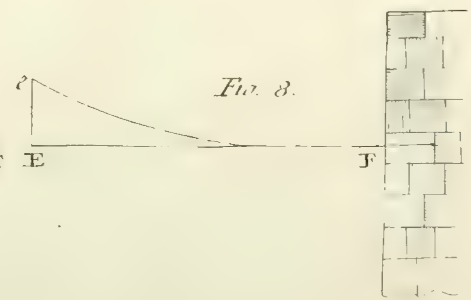
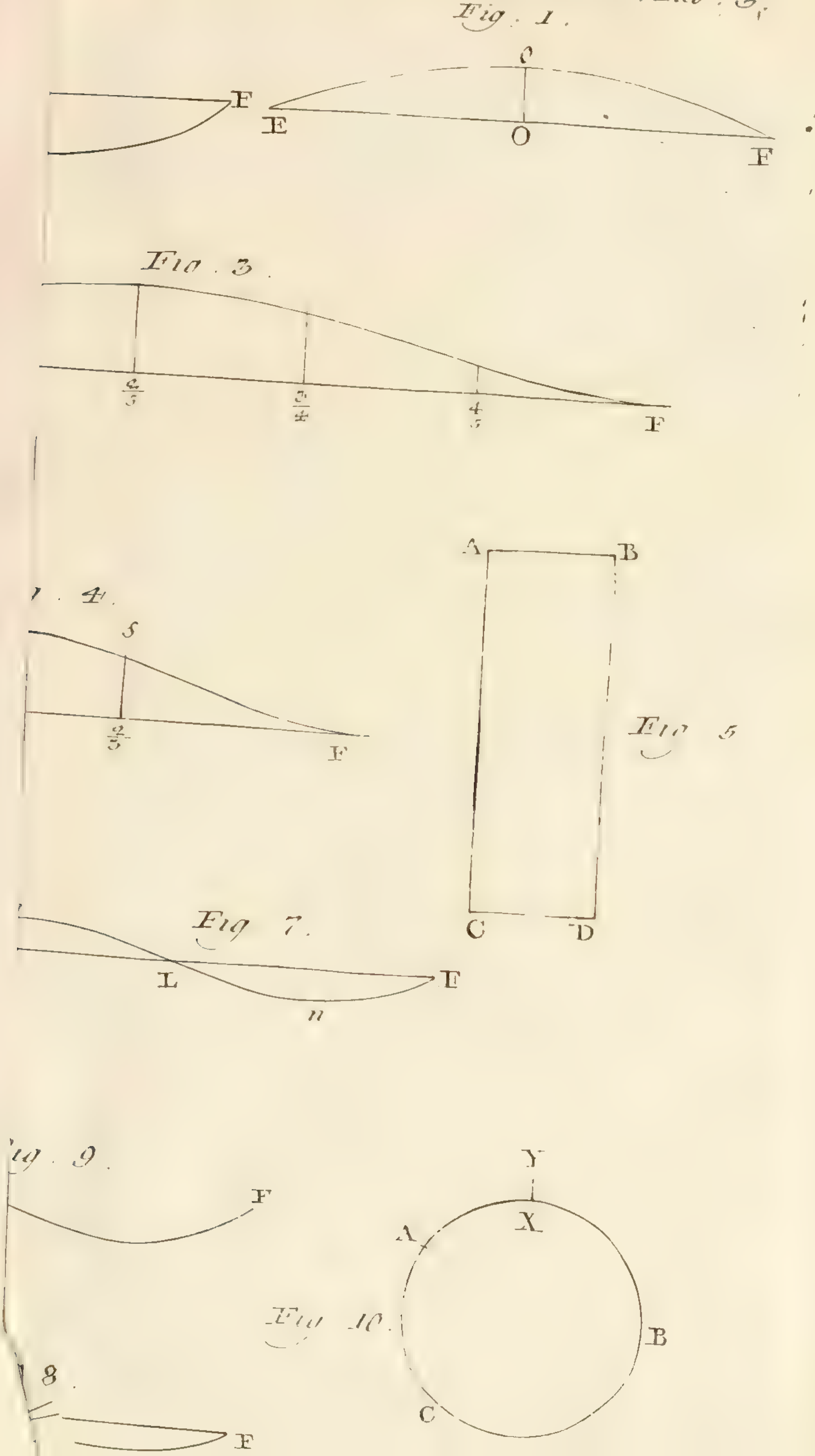
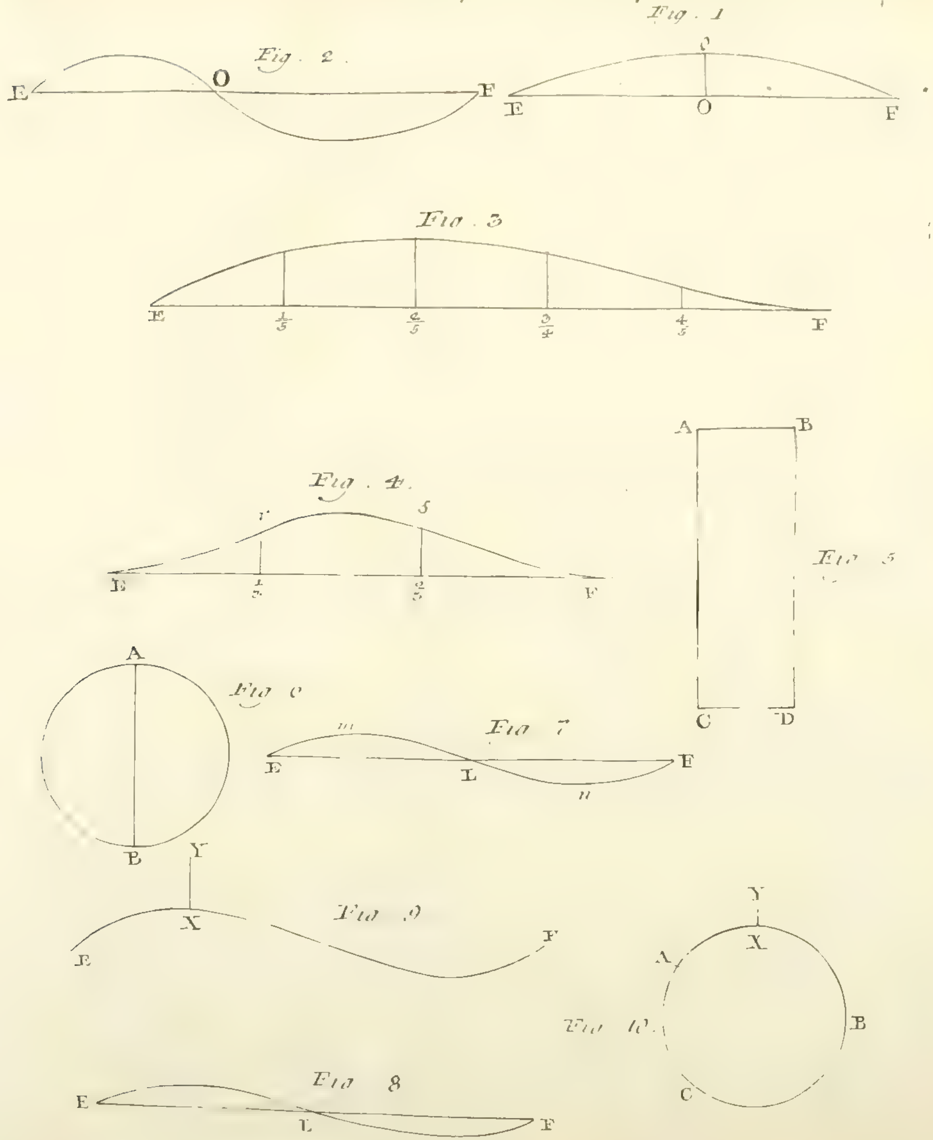
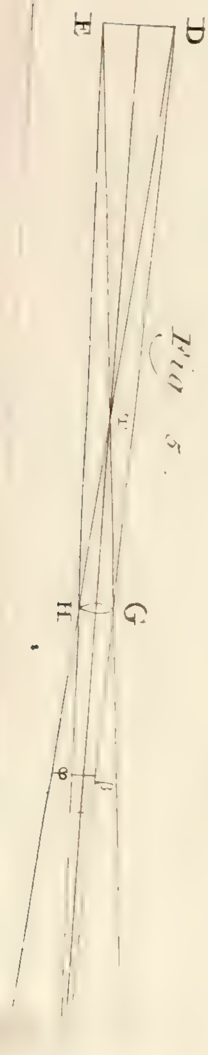


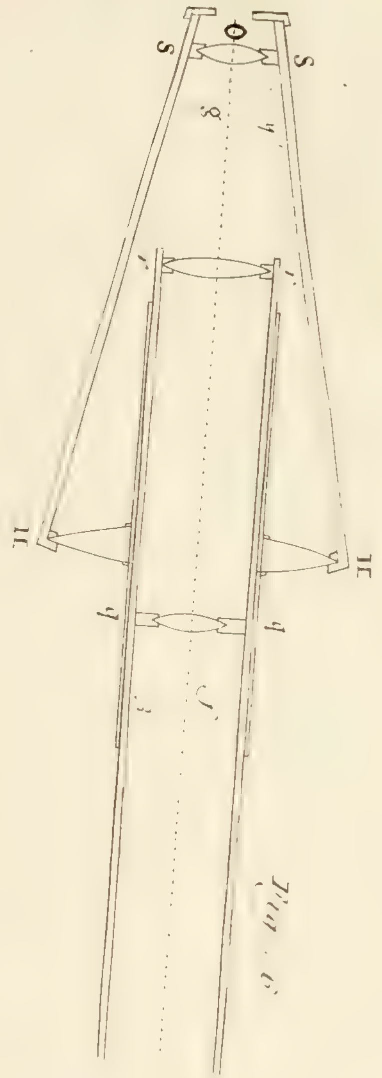
Fig. 8.

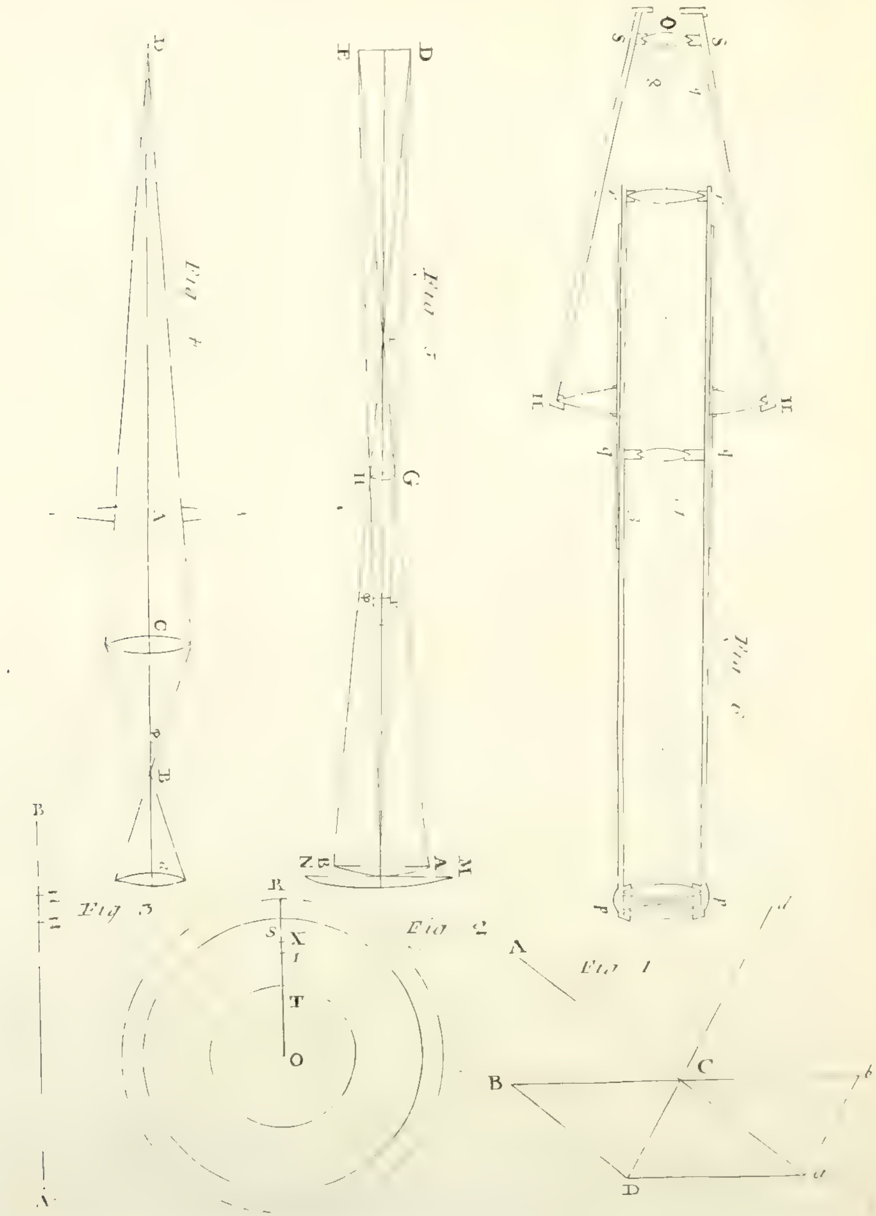



Fig. 1.
C
F
E
O
F
Fig. 3.
F
4.
S
F
A
B
Fig. 5
C
D
Fig. 7.
L
F
n
9.
F
Y
X
A
Fig. 10.
B
C
8.
F


Fig. 1
Fig. 2.
E
O
F
Fig. 3
Fig. 4.
Fig. 5
A
B
C
D
Fig. 6
Fig. 7
L
m
n
Fig. 8
Fig. 9
Y
X
Fig. 10.


D
E
G
H
Fig. 5.


O
S
S
H
H
q
q
Fig. 6.


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
A
B
C
D
O
T
X
S
R

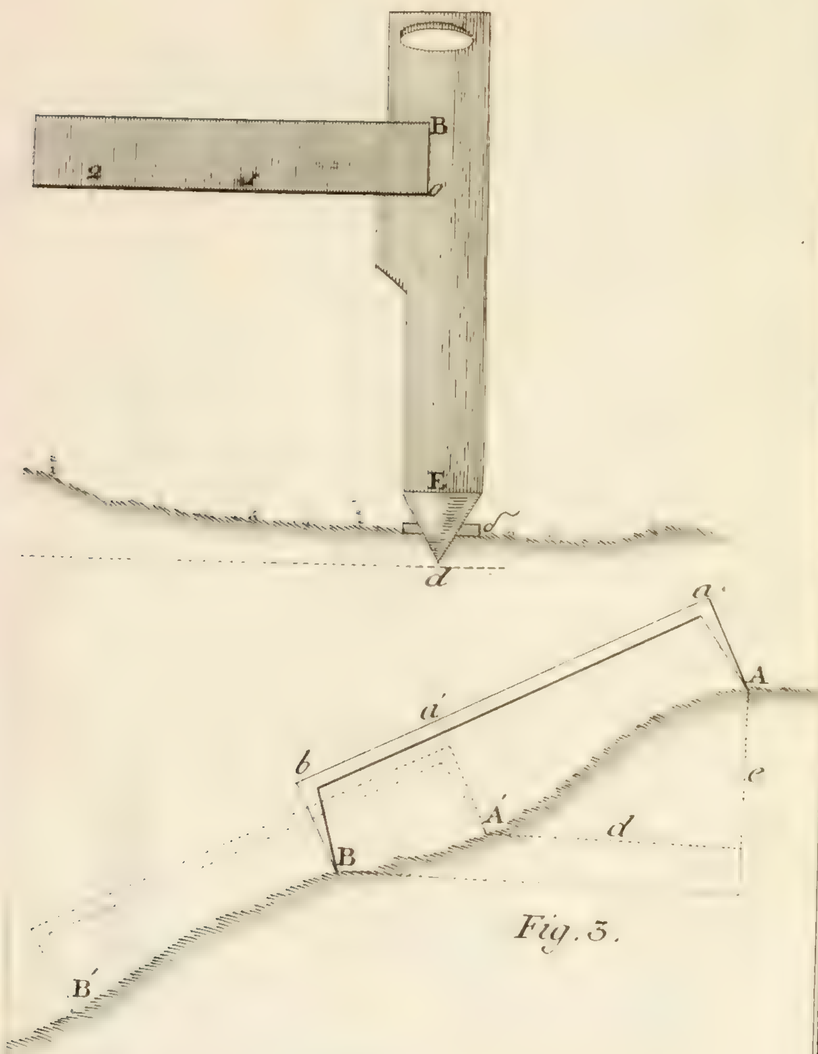


Fig. 3.

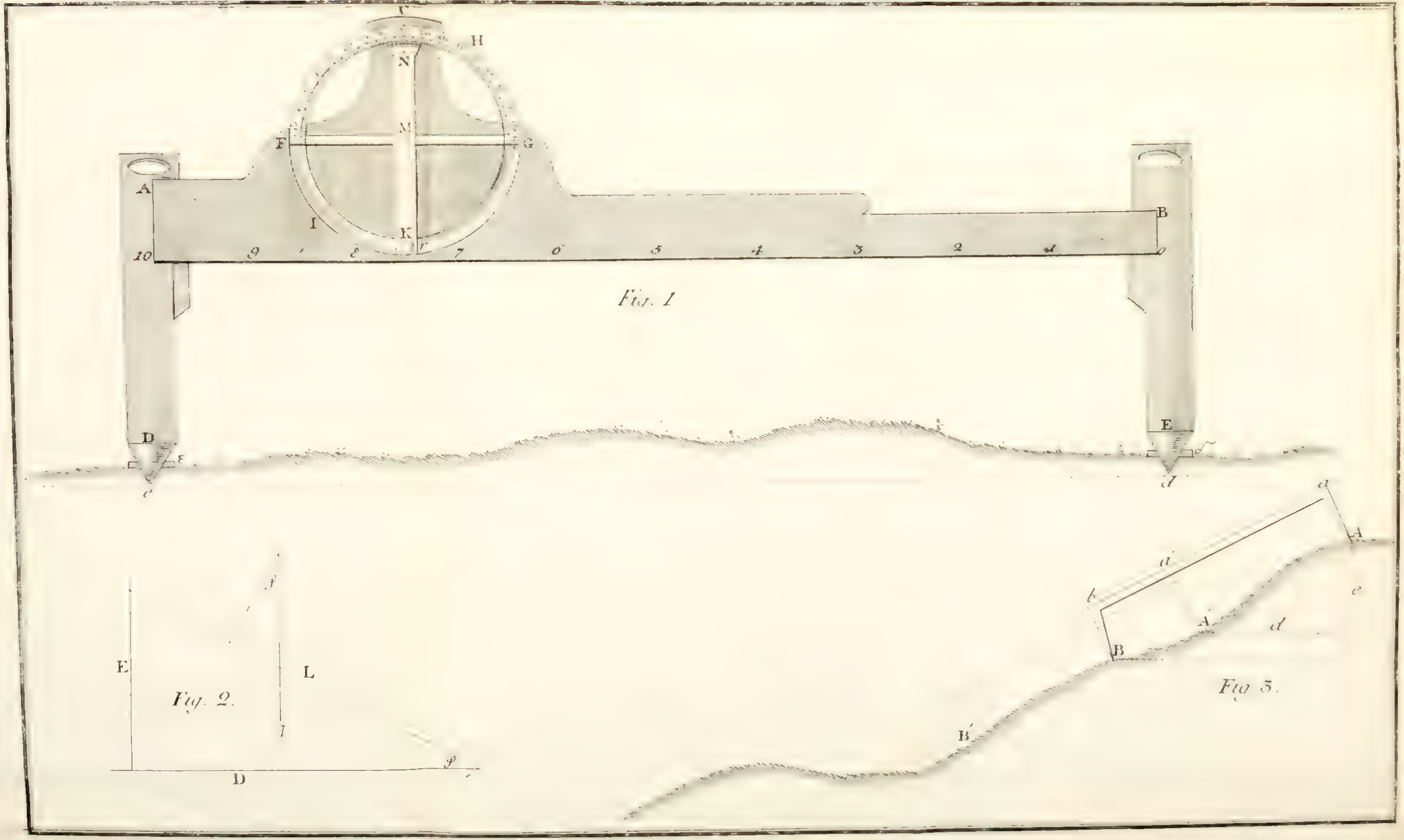
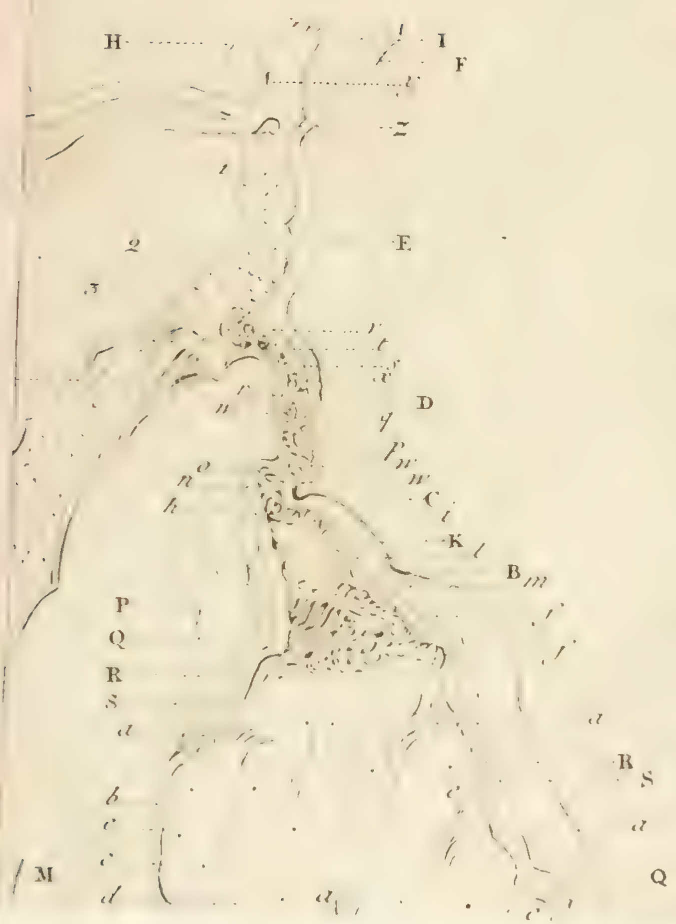


Fig. 1

Fig. 2.

Fig. 3.


H
I
F
E
D
C
K
B
P
Q
R
S
R
S
M
Q





Acad. Imp. Sc. Petrop. Tom. III. p. 1. Tab. VII.



Fig. 2.

Fig. 1.

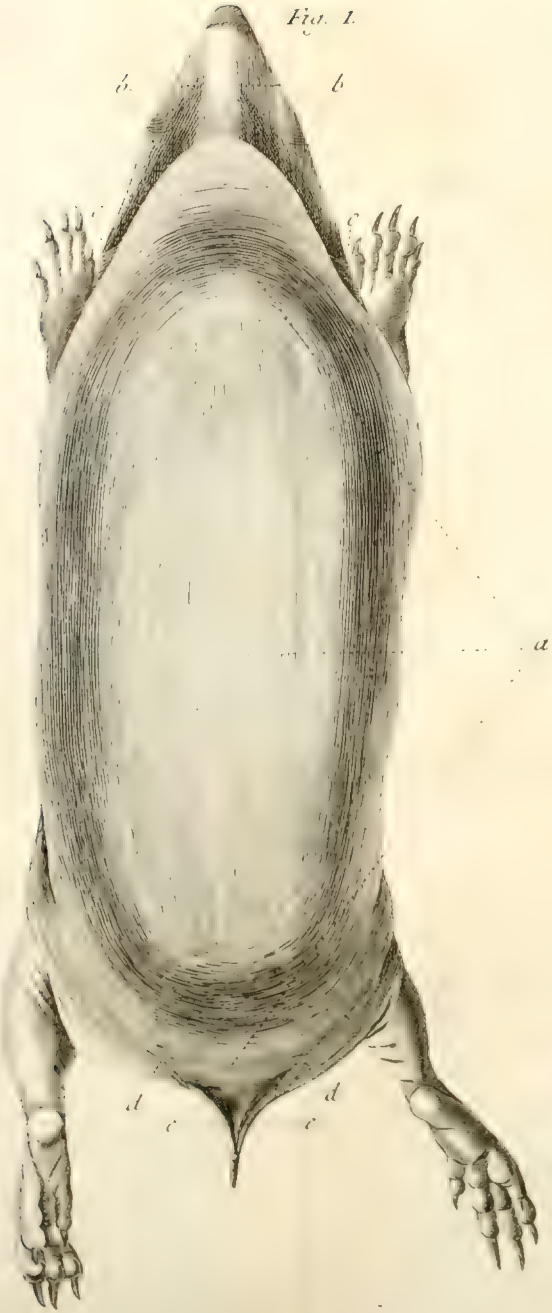


Fig. 2.





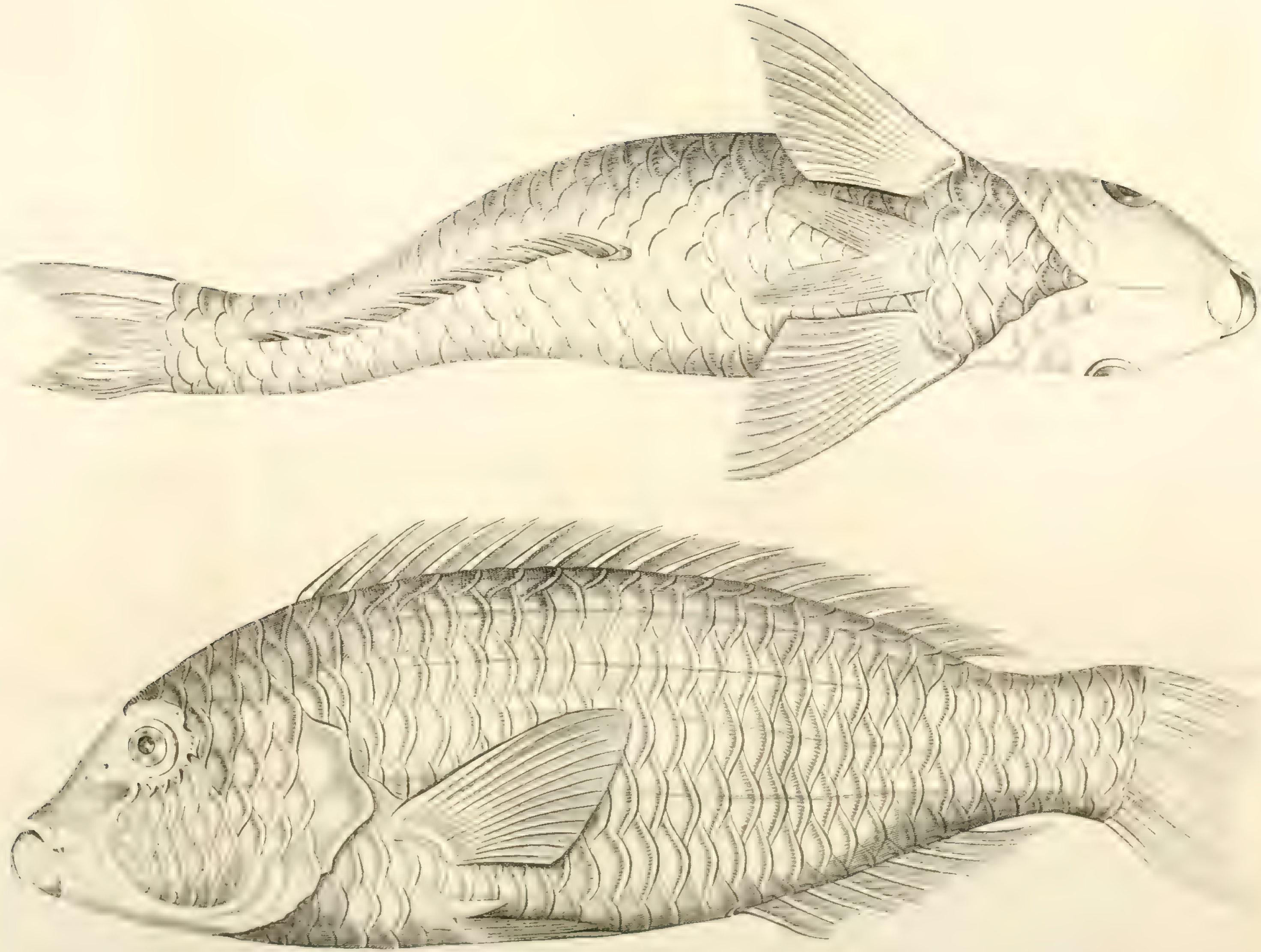


Fig 2.

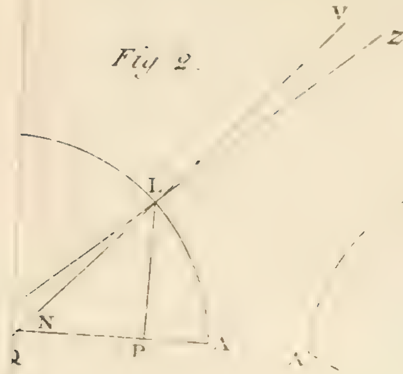


Fig 3.



Fig 5.



Fig 6.



Fig 8.

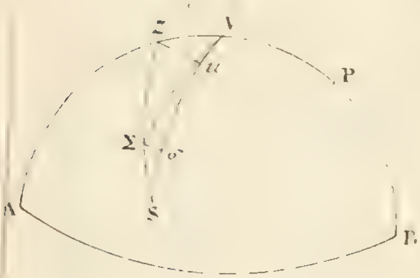
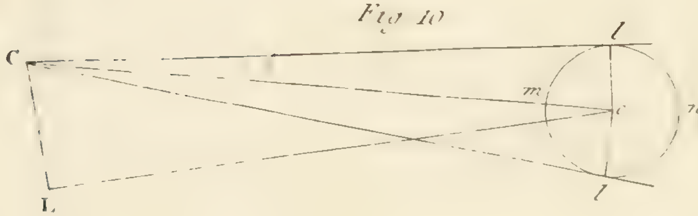
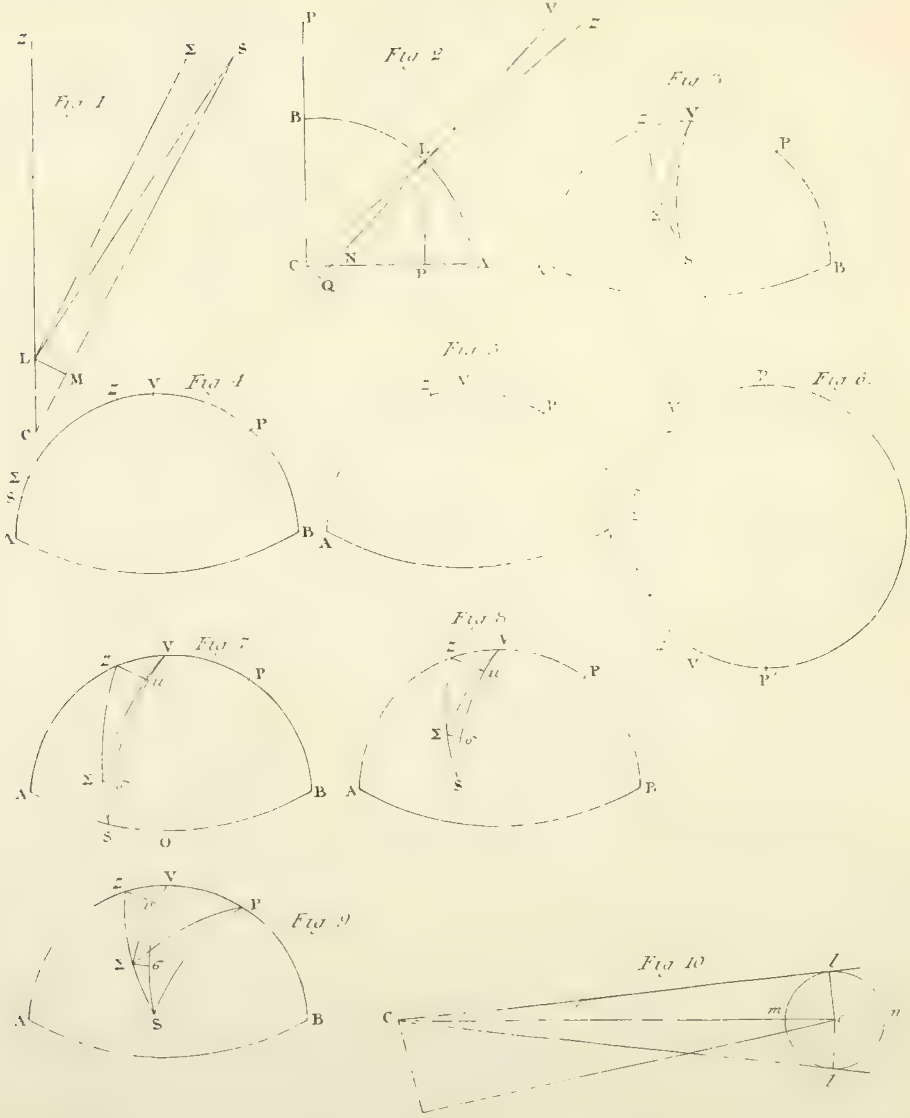


Fig 10.




Fig 1
Fig 2
Fig 3
Fig 4
Fig 5
Fig 6.
Fig 7
Fig 8
Fig 9
Fig 10

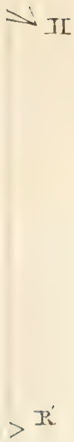
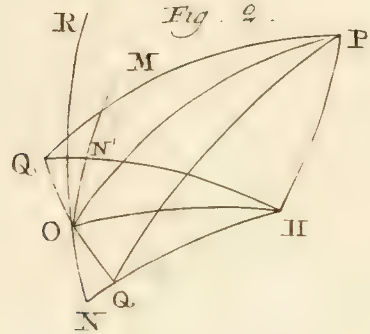


Fig . 2 .



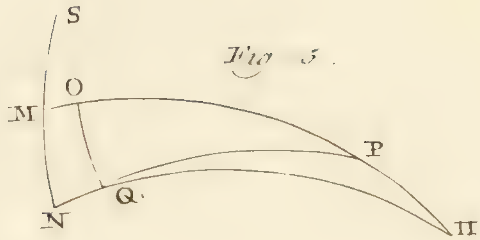
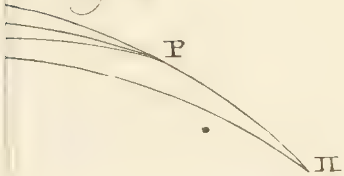


Fig . 3 .

Fig . 4 .



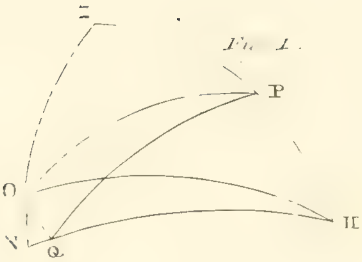


Fig. 1.

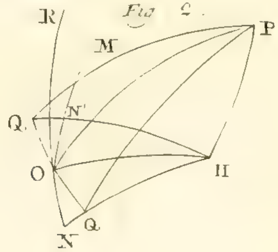


Fig. 2.

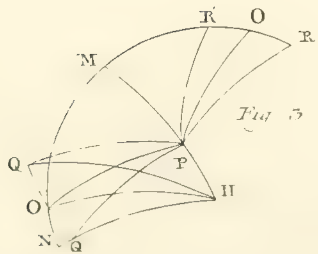


Fig. 3

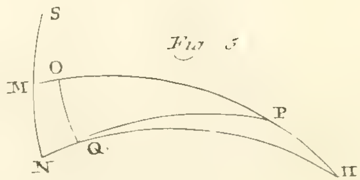


Fig. 5

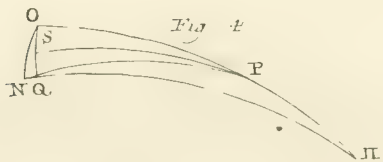
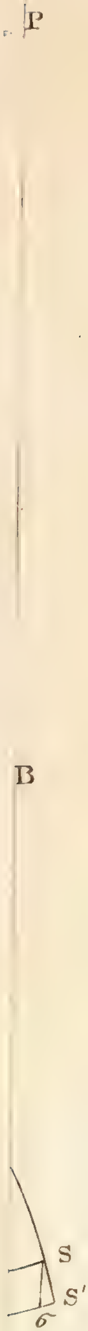


Fig. 4



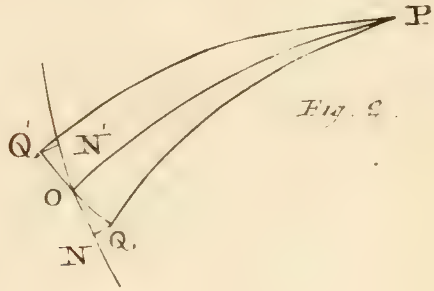


Fig. 2.

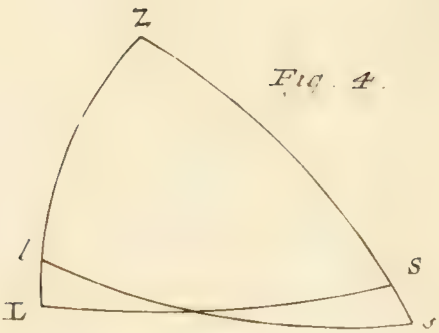


Fig. 4.

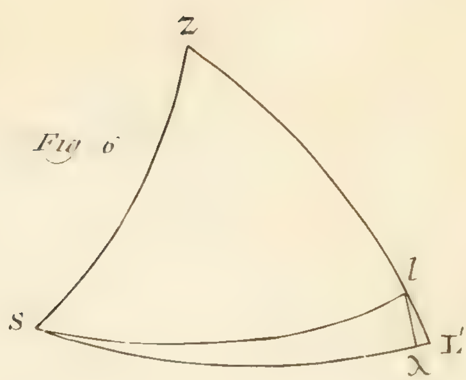


Fig. 6.

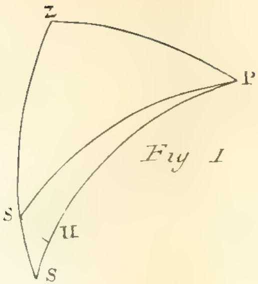


Fig. 1

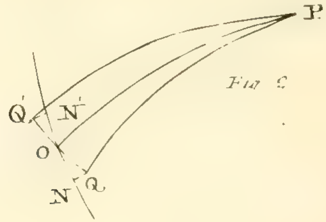


Fig. 2

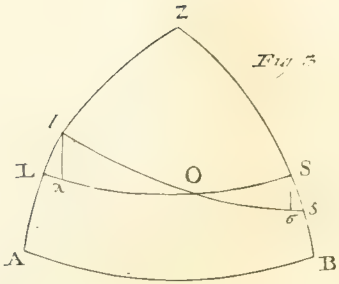


Fig. 3

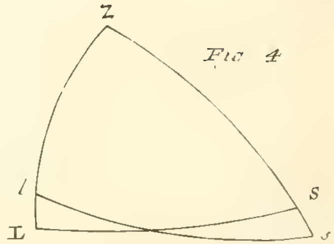


Fig. 4

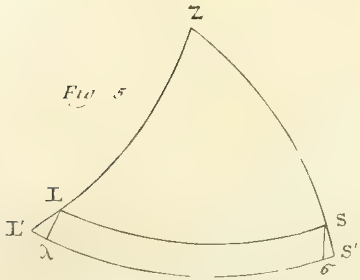


Fig. 5

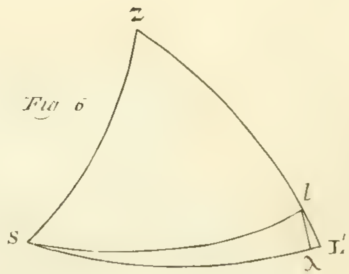


Fig. 6

nae 1779 pt. 1

AMNH LIBRARY
100125009